

座位号

河海大学 2024-2025 学年第 I 学期
《几何与线性代数》期末考试试卷
(理、工科用) 2025 年 1 月

专业 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	成绩
得分								

一、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

- 1、设 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 为非零向量, 则 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 平行的充分必要条件为 ().
- A) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$; B) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$; C) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$; D) $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{0}$.
- 2、直线 $L: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{-3}$ 和平面 $\pi: 4x - 2y - 2z + 3 = 0$ 的位置关系是 ().
- A) 直线 L 与平面 π 垂直; B) 直线 L 与平面 π 平行, 但不在平面 π 上;
C) 直线 L 在平面 π 上; D) 直线 L 与平面 π 相交.
- 3、设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $AB = O$, 则 ().
- A) $A = O$ 或 $B = O$; B) $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$; C) $BA = O$; D) $|A| + |B| = 0$.
- 4、设向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$, 其秩为 r_1 , 向量组 $B: \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_s$, 其秩为 r_2 , 且向量组 A 可以被向量组 B 线性表示, 则 () 成立.
- A) 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_s$ 的秩为 r_2 ;
B) 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_s$ 的秩为 $r_1 + r_2$;
C) 向量组 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1, \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\alpha}_s + \vec{\beta}_s$ 的秩为 $r_1 + r_2$;
D) 向量组 $\vec{\alpha}_1 - \vec{\beta}_1, \vec{\alpha}_2 - \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\alpha}_s - \vec{\beta}_s$ 的秩为 $|r_1 - r_2|$.

5、设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 线性相关, 则().

A) $\vec{\alpha}_3$ 必可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 线性表示;

B) $\vec{\alpha}_1$ 必不能由 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性表示;

C) $\vec{\alpha}_4$ 必可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示方法唯一;

D) $\vec{\alpha}_4$ 必可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示方法不唯一.

6、设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 3 行加到第 1 行上得到矩阵 B , 再将矩阵 B 的第 2

列与第 3 列做交换得到单位矩阵 E , 如果记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

则 $A = ($).

A) $P_1^{-1}P_2$; B) $P_2P_1^{-1}$; C) $P_1^{-1}P_2^{-1}$; D) $P_2^{-1}P_1^{-1}$.

二、填空题 (每空 3 分, 共 18 分)

1、空间 $\mathbb{R}^2$ 中基 $\vec{\alpha}_1 = [1, 0]^T$, $\vec{\alpha}_2 = [1, -1]^T$ 到基 $\vec{\beta}_1 = [1, 1]^T$, $\vec{\beta}_2 = [1, 2]^T$ 的过渡矩阵为_____. 已知向量 $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2$, 则 $\vec{\gamma}$ 在基 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ 的坐标为_____.

2、已知 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 3, 0, 4, 它们所对应的特征向量分别为 $\vec{\alpha}$,

$\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, 令 $P = [2\vec{\alpha}, 2\vec{\beta}, -3\vec{\gamma}]$, 则 $P^{-1}AP =$ _____.

3、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B = E + A$ 的逆矩阵为_____.

4、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 t 满足_____.

5、已知 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, 3, 则 $|2A^{-1} - A| =$ _____.

三、计算题 (共 55 分)

1、(本题 6 分) 已知直线 $\frac{x-1}{a} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{3}$ 和 $\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z+14}{7}$ 相交, (1) 求 a 的值; (2) 求两条直线的交点; (3) 求两条直线所在的平面方程.

2、(本题 6 分) 用施密特正交化法对向量组 $\vec{\alpha}_1 = [1, 1, 1]^T$, $\vec{\alpha}_2 = [1, 2, 3]^T$, $\vec{\alpha}_3 = [1, 4, 9]^T$ 进行正交化并且单位化.

3、(本题 9 分) 已知向量组 $A: \vec{\alpha}_1 = [1, -1, 2, 4]^T, \vec{\alpha}_2 = [0, 3, 1, 2]^T, \vec{\alpha}_3 = [3, 0, 7, 14]^T,$
 $\vec{\alpha}_4 = [2, 1, 5, 6]^T, \vec{\alpha}_5 = [1, -1, 2, 0]^T$, (1) 证明 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_5$ 线性无关; (2) 求 A 的一组包含向量
 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_5$ 的极大线性无关组; (3) 将其余向量用 (2) 中的极大线性无关组表示出来.

4、(本题 10 分) 已知 $\vec{\alpha}_1 = [-1, 1, 2]^T, \vec{\alpha}_2 = [a, 2, 3]^T, \vec{\alpha}_3 = [-2, 1, 3]^T, \vec{\beta} = [-2, b, 3]^T$, 问:
当 a, b 分别取何值时, (1) $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示方法唯一; (2) $\vec{\beta}$
不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示; (3) $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示方法不唯一,
并写出一般表达式.

5、(本题 12 分) 已知二次型 $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$, (1) 写出二次型 $f(\vec{x})$ 对应的矩阵 A ; (2) 求正交变换 $\vec{x} = P\vec{y}$, 将二次型 $f(\vec{x})$ 化为标准型, 并写出标准型; (3) 判断二次型 $f(\vec{x})$ 是正定的、负定的还是不定? 请说明理由.

6、(本题 12 分) 已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有 3 个线性无

关的解, (1) 设 A 为上述非齐次线性方程组的系数矩阵, 求 $R(A)$, 并给出理由;
(2) 求 a, b 的值, 并利用解的结构写出上述非齐次线性方程组的通解.

四、证明题（共9分）

1、（本题4分）设 A 为正定矩阵，证明：矩阵 A^{2024} 为正定矩阵。

2.（本题5分）设 A 为 $m \times n$ 的矩阵，且 $R(A) = m \leq n$ 证明： $R(AA^T) = R(A)$ 。