

习题一 随机事件及其概率和性质

学号_____班级_____姓名_____

1.1 选择题

- (1) 设 A 、 B 为任意两个事件，则下列关系式成立的是 ()。
- (A) $(A \cup B) - B = A$; (B) $(A \cap B) - B \supset A$; (C) $(A \cap B) - B \subset A$; (D) $(A - B) \cup B = A$ 。
- (2) 以 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则对立事件 $\bar{A}$ 为 ()。
- (A) 甲种产品滞销，乙种产品畅销 (B) 甲、乙产品均畅销
(C) 甲种产品滞销 (D) 甲产品滞销或乙产品畅销

1.2 指出下列关系中那些是正确的，那些是错误的，并说明理由。

- (1) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$; (2) $(A \cup B) - A = B$;
- (3) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \bar{B}$; (4) $\bar{A} B \cup A \bar{B} \cup \bar{A} \bar{B} = \bar{A}$;
- (5) $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = \emptyset$; (6) 若 $B \subset A$ ，则 $A \cup B = A$ 。

1.3 试把 $A \cup B \cup C$ 表示成三个两两互不相容事件的和。

1.4 设 $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $A = \{x | 0.5 < x \leq 1\}$, $B = \{x | 0.25 \leq x < 1.5\}$, 请具体写出下列各事件:

- (1) $\bar{A}B$; (2) $\bar{A} \cup B$; (3) $\overline{\bar{A}\bar{B}}$; (4) $\overline{AB}$ 。

1.5 一个工人生产了四件产品，以 A_i 表示他生产的第 i 件产品是正品 ($i = 1, 2, 3, 4$)，试用 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示下列事件：(1) 没有一件产品是次品；(2) 至少有一件产品是次品；(3) 恰有一件产品是次品；(4) 至少有两件产品不是次品。

1.6 设 A 、 B 、 C 是三个事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ， $P(AC) = \frac{1}{8}$ ， $P(AB) = P(BC) = 0$ ，求 A 、 B 、 C 中至少有一个发生的概率。

1.7 设 A 、 B 是两事件，且 $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.7$ 。问（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

1.8 袋中有白球 5 只，黑球 6 只，依次从袋中不放回取出三只，求顺序为黑白黑的概率。

1.9 （1）用“ $\leq$ ”按由小到大的顺序排列 $P(A)$ ， $P(A \cup B)$ ， $P(AB)$ ， $P(A) + P(B)$ 四个数。

（2）已知 $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(AB) = \frac{1}{6}$ ，求 $P(A \cup B)$ ， $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ， $P(A\bar{B})$ ， $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B)$ 。

1.10 设 A 、 B 为随机事件， $P(A) = 0.5$ ， $P(A - B) = 0.2$ ，求 $P(\overline{AB})$ 。

习题二 古典概型、条件概率及事件的独立性

学号_____班级_____姓名_____

2.1 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个。(1) 求确有 90 个次品的概率；(2) 求至少有 2 个次品的概率。

2.2 盒子中有 10 只球，其中 4 只红球，6 只黑球，今从盒中取三次球，一次取一只，不放回。(1) 求第三次取球取到黑球的概率；(2) 求第三次取球才取到黑球的概率。

2.3 从 $a, b, c, \dots, h$ 这 8 个字母中任意选出三个不同的字母，试求下列事件的概率：
 $A = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 与 } b\}$ ； $B = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 或 } b\}$ ； $C = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 但含有 } b\}$ 。

2.4 从 6 双不同的手套中任取 4 只，问其中至少有一双配对的概率是多少？

2.5 袋中有 10 只球，9 只白球，1 只红球，10 个人依次从袋中各取一球，每人取球后不再放回袋中，问第一人、第二人、...、最后一人取得红球的概率各是多少？

2.6 (1) 已知 $P(\bar{A}) = 0.3$ ， $P(B) = 0.4$ ， $P(A\bar{B}) = 0.4$ 。求 $P(B|A \cup \bar{B})$ ；

(2) 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A|B) = \frac{1}{2}$ 。求 $P(A \cup B)$ 。

2.7 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别是 0.4, 0.5, 0.7，飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

2.8 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，顾客从中随机察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则不买。求：
(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率；(2) 在顾客买下该箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

2.9 有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3, 0.2, 0.1, 0.4。如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别是 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ ，而乘飞机则不会迟到。结果他迟到了，试问他是乘火车来的概率是多少？

2.10 (1) 设四事件 A, B, C, D 相互独立，且 $P(A) = 0.1, P(B) = 0.2, P(C) = 0.3$ ，则“这三个事件恰好发生两个”的概率为_____；
(2) 若事件 A 与 B _____，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ；
(3) 若事件 A 与 B _____，则 $P(AB) = P(A)P(B)$ ；
(4) 若事件 A 与 B _____，则 $P(A) = 1 - P(B)$ 。

习题三 离散型随机变量及其分布

学号_____班级_____姓名_____

3.1 填空题

- (1) 进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为 p , 失败的概率为 $q=1-p$ ($0 < p < 1$)。
- a. 将试验进行到出现一次成功为止, 以 X 表示所需的试验次数, 则 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$;
- b. 将试验进行到出现 r 次成功为止, 以 Y 表示所需的试验次数, 则 Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 某人射击命中率为 0.7, 现独立射击 10 次, 以 X 表示命中次数, 则 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.2 试判断下面给出的是否为某个随机变量的分布律?

(1)

X	1	2	3
p	0.7	0.1	0.1

(2)

X	1	2	...	k	...
p	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	...	$(\frac{1}{2})^k$	...

3.3 计算下列各题

- (1) 已知随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=a\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$ 为常数, $k=0, 1, 2, \dots$, 求 a 。
- (2) 已知随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=a(\frac{2}{3})^k$, $k=1, 2, 3$, 求 a 。
- (3) 设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$, 求 $P\{X=4\}$ 。

3.4 有一大批产品, 其验收方案如下。先作第一次检验: 从中任取 10 件, 经检验无次品接受这批产品, 次品数大于 2 拒收; 否则作第二次检验, 其做法是从中再任取 5 件, 仅当 5 件中无次品时接受这批产品。若产品的次品率为 10%, 求

- (1) 这批产品经第一次检验就被接受的概率。
- (2) 这批产品需要做第二次检验的概率。
- (3) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率。
- (4) 这批产品在第一次检验时未能作出决定且第二次检验时被接受的概率。

3.5 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次, 每次随机地任取 10 件产品进行检验, 如果发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数, 求 X 的分布律。

3.6 把三个球随机地投入三个盒子中去, 每个球投入各个盒子的可能性是相同的。设随机变量 X 及 Y 分别表示投入第一个及第二个盒子中的球的个数, 求 (X, Y) 的分布律。

3.7 以 X 记某医院一天出生的婴儿人数, Y 记其中男婴的人数, 设 X 和 Y 的联合分布律为:

$$P\{X=n, Y=m\} = \frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}, \quad m=0,1,2,\dots, n; \quad n=0,1,2,\dots$$

求 (1) 边缘分布律; (2) 条件分布律。

3.8 设某班车起点站时车上乘客人数 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p ($0 < p < 1$), 且各乘客中途下车与否相互独立。以 Y 表示在中途下车的乘客人数。求:

- (1) 在发车时有 n 位乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;
- (2) 二维随机向量 (X, Y) 的概率分布。

习题四 离散型 r.v. 的独立性及其函数的分布

学号_____ 班级_____ 姓名_____

4.1 填空题

- (1) 设 (X, Y) 的联合分布律为 (表 1), 若 X 与 Y 相互独立, 则 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____。

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

表 1

X	-2	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

表 2

- (2) 设随机变量 X 的分布律为 (表 2), 则 $Y = X^2$ 的分布律为_____。

- (3) 设相互独立的随机变量 X, Y 有相同的分布律, X 的分布律为

X	0	1
p	0.5	0.5

, 则 $U = \max\{X, Y\}$

的分布律为_____; $V = \min\{X, Y\}$ 的分布律为_____。

- 4.2 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布, 且 $P\{X_i=1\}=0.6, P\{X_i=0\}=0.4, (i=1, 2, 3, 4)$ 。试求行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的分布律。

X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

- 4.3 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

, 求 (1) $\sin(X)$ 的分布律; (2) $\frac{X^2}{\pi^2}$ 的分布律; (3) $\cos(X)$ 的分布律。

- 4.4 设 $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$ 且相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布律, 并问 Z 服从什么分布。

4.5 设随机变量 $X \sim B(3, \frac{1}{2})$, 求 X 的分布函数 $F(x)$ 。

4.6 在区间 $[0, 2]$ 上任意投掷一个质点, 以 X 表示这个质点的坐标, 设这个质点落在 $[0, 2]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比, 试求 X 的分布函数。

4.7 确定下列函数中常数 A , 使之成为密度函数。(1) $f(x) = Ae^{-|x|}$; (2) $f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{(1+x)^4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 。

4.8 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求(1) X 的分布函数 $F(x)$; (2) 概率 $P\{X < 0.5\}$,

$P\{X > 1.3\}$, $P\{0.2 < X < 1.2\}$ 。

4.9 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 。试求(1) 系数 A ; (2) X 落在区间 $(0.3,$

$0.7)$ 内的概率; (3) X 的密度函数。

“随机事件和概率”测验题

一、填空题

1. 设 A, B, C 为三个事件, 且 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.9, P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = 0.97$, 则 $P(AB - C) =$ _____。
2. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率为_____。
3. 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3, 0.6。若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件, 则概率 $P(A\bar{B}) =$ _____。
4. 某市有 50% 住户订日报, 有 65% 住户订晚报, 有 85% 住户至少订这两种报纸中的一种, 则同时订这两种报纸的住户的百分比是_____。
5. 三台机器相互独立运转, 设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9、0.8、0.7, 则这三台机器中至少有一台发生故障的概率为_____。
6. 设 A, B, C 两两独立的事件, 且 $ABC = \Phi$ 。若 $P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$, 且 $P(A \cup B \cup C) = 9/16$, 则 $P(A) =$ _____。
7. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则两数之和小于 $6/5$ 的概率=_____。
8. 三人独立破译一密码, 他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 则此密码被译出的概率_____。

二、选择题

1. 设 A, B, C 是三个事件, 与事件 A 互斥的事件是()。
(A) $\bar{A}B \cup \bar{A}C$ (B) $\overline{A(B \cup C)}$ (C) $\bar{A}BC$ (D) $\overline{A \cup B \cup C}$
2. 设 A, B 是任意二个事件, 则()。
(A) $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A)P(B)$ (B) $P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B)$
(C) $P(A - B)P(B - A) \leq P(A)P(B) - P(AB)$ (D) $P(A - B)P(B - A) \geq \frac{1}{4}$
3. 事件 A 与 B 相互独立的充要条件为()。
(A) $A \cup B = \Omega$ (B) $P(AB) = P(A)P(B)$ (C) $AB = \phi$ (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. 设 A, B 为二个事件, 且 $P(AB) = 0$, 则()。
(A) A, B 互斥 (B) AB 是不可能事件
(C) AB 未必是不可能事件 (D) $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$
5. 设 A, B 为任意二个事件, 且 $A \subset B, P(B) > 0$, 则下列选项必然成立的是()。
(A) $P(A) < P(A|B)$ (B) $P(A) \leq P(A|B)$ (C) $P(A) > P(A|B)$ (D) $P(A) \geq P(A|B)$

三、计算题

1. 某厂生产的产品次品率为 0.05, 每 100 个产品为一批, 抽查产品质量时, 在每批中任取一半来检查, 如果发现次品不多于 1 个, 则这批产品可以认为合格的, 求一批产品被认为是合格的概率。
2. 书架上按任意次序摆着 15 本教科书, 其中有 5 本是数学书, 从中随机地抽取 3 本, 至少有一本是数学书的概率。
3. 某种产品的商标为“MAXAM”, 其中有 2 个字母脱落, 有人捡起随意放回, 求放回后仍为“MAXAM”的概率。
4. 设甲、乙两袋, 甲袋中有 n 个白球, m 个红球, 乙袋中有 N 个白球, M 个红球, 今从甲袋中任取一只放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 问取到白球的概率。

“离散型随机变量及其分布” 测验题

一、填空题

1. 设随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(3, p)$, 若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geq 1\} =$ _____。
2. 已知随机变量 X 只能取 $-1, 0, 1, 2$ 四个数值, 其相应的概率依次为 $\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}, \frac{5}{8c}, \frac{2}{16c}$, 则 $c =$ _____。
3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品, 在其中取 3 次, 每次任取 1 只, 作不放回抽样, 以 X 表示取出的次品数, 则 X 的分布律为 _____。
4. 已知 $P\{X = k\} = \frac{a}{k}$, $P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2}$ ($k=1, 2, 3$), X 与 Y 独立, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

二、选择题

1. $P\{X = k\} = c \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ($k = 0, 2, 4, \dots$) 是随机变量 X 的概率分布, 则 λ, c 一定满足 ()。
 (A) $\lambda > 0$ (B) $c > 0$ (C) $c \lambda > 0$ (D) $c > 0$ 且 $\lambda > 0$
2. 设每次试验成功的概率为 p ($0 < p < 1$), 则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 ()。
 (A) p^3 (B) $1 - p^3$ (C) $(1 - p)^3$ (D) $1 - (1 - p)^3$

三、计算题

1. 设一批产品中有 10 件正品, 3 件次品, 现一件一件地随机取出, 分别求出在下列各情形中直到取得正品为止所需次数 X 的分布律。

(1) 每次取出的产品不返回; (2) 每次取出的产品经检验后放回, 再抽取; (3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回, 再抽取。

2. 设 X, Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
1/2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $Z = X + Y$ 的分布律; (2) $W = X - Y$ 的分布律; (3) $U = X^2 + Y - 2$ 的分布律。

3. 已知 X 服从参数 $p = 0.6$ 的 (0-1) 分布, 在 $X = 0, X = 1$ 下, 关于 Y 的条件分布分别如表 1、表 2 所示。

表 1				表 2			
Y	1	2	3	Y	1	2	3
$P\{Y X=0\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$P\{Y X=1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求 (X, Y) 的联合概率分布, 以及在 $Y \neq 1$ 时, 关于 X 的条件分布。

习题五 一维连续型随机变量及其分布

学号_____班级_____姓名_____

5.1 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟, 他就离开. 他一个月要到银行 5 次,}$$

以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数, 写出 Y 的分布律, 并求 $P\{Y \geq 1\}$ 。

5.2 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求常数 a , 使 $P\{X > a\} = P\{X < a\}$ 成立。

5.3 在 $\triangle ABC$ 内取一点 P , P 到 AB 的距离为 X , 求 X 的分布函数。

5.4 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P\{X = -1\} = \frac{1}{8}$, $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$, 在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下, X 在 $(-1, 1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比。试求:

(1) X 的分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$; (2) X 取负值的概率 P 。

5.5 某公共汽车站从上午 7 时起每 15 分钟发一班车,即在 7:00, 7:15, 7:30, … 有汽车发出。如果乘客到达此汽车站的时间 X 服从 7:00~7:30 上的均匀分布,试求乘客在车站等待:

(1) 不到 5 分钟的概率; (2) 超过 10 分钟的概率。

5.6 设 $X \sim N(108, 9)$ 。(1) 求 $P\{101.1 < X < 117.6\}$; (2) 求常数 a , 使 $P\{X < a\} = 0.90$;

(3) 求常数 a , 使 $P\{|X - a| > a\} = 0.01$ 。

5.7 从南郊某地到北区火车站有两条路可走,第一条路线穿过市区,路程短,但交通拥挤,所需时间(以分计)服从正态分布 $N(50, 100)$; 第二条路线沿环城公路走,路线较长,但阻塞少,所需时间服从正态分布 $N(60, 16)$ 。(1) 假如有 70 分钟可用,问应走哪一条路线? (2) 若只有 65 分钟可用,又应走哪一条路线?

5.8 电源电压在不超过 200 伏、200~240 伏和超过 240 伏这三种情况下,元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001, 0.2。设电源电压服从正态分布 $N(220, 25^2)$, 求 (1) 元件损坏概率 α ; (2) 元件损坏时,电压在 200~240 伏间的概率 β 。

习题六 二维连续型 r.v. 的联合与边缘分布及独立性

学号_____ 班级_____ 姓名_____

6.1 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$ 所围成, 二维随机向量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X, Y) 关于 X 的边缘密度在 $x = 2$ 处的值为_____。

6.2 设 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y) = A \cdot \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \cdot \left(C + \arctan \frac{y}{2} \right)$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ 。(1) 求系数 A 、 B 、 C ; (2) 求 (X, Y) 的密度函数; (3) 求关于 X 和 Y 的边缘分布函数和边缘密度函数。

6.3 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 X 与 Y 中至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

6.4 设 (X, Y) 具有下列密度函数, 分别求边缘密度函数。

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}; (2) f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

- 6.5 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。(1) 求常数 k ;
(2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$; (3) 求 $P\{X < 1.5\}$; (4) 求 $P\{X + Y \leq 4\}$ 。

- 6.6 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0, 0.2)$ 上服从均匀分布, Y 的密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$ 。(1) 求 X 和 Y 的联合密度函数; (2) 求 $P\{Y \leq X\}$ 。

- 6.7 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 证明: X 和 Y 的不相互独立。

- 6.8 某电子仪器由两个部件构成, 其寿命 (单位: 千小时) X 与 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 问: (1) X 与 Y 是否独立? (2) 两部件的寿命都超过 100 小时的概率。

习题七 连续型 r.v.函数的分布、r.v.的数学期望(I)

学号_____班级_____姓名_____

7.1 随机变量 X 服从 $(1, 2)$ 上的均匀分布, 求 $Y = e^{2X}$ 的概率密度函数。

7.2 设 X 、 Y 是相互独立的随机变量, 密度函数分别为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ 。

求 $Z = X + Y$ 的密度函数。

7.3 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求 $Z = X + Y$ 的密度函数。

7.4 填空题

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次命中目标的概率为 0.4, 则 $E(X) = \underline{\hspace{1cm}}$, $D(X) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$, 则 $E(X) = \underline{\hspace{1cm}}$, $E(3X^2 - 2X) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 $E(X) = \underline{\hspace{1cm}}$, $E(X^2) = \underline{\hspace{1cm}}$, $E(3X^2 + 5) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) 某新产品在未来市场上的占有率 X 是仅在区间 $(0, 1)$ 上取值的随机变量, 它的密度函数为

$f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则平均市场占有率为_____。

7.5 有同类型备件 10 个, 其中 7 个正品, 3 个次品。修理机器时, 从中无放回一件接一件地取, 直到取得正品为止。以 X 表示停止抽取时已取的备件的个数, 求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E\{[X-E(X)]^2\}$ 。

7.6 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 且已知 $E(X) = \frac{3}{5}$, 求 a , b 。

7.7 设 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 (1) $E(X)$, $E(Y)$; (2) $E[(X-Y)^2]$; (3) $E(XY)$ 。

7.8 假设某路公共汽车起点站于每时的 10 分、30 分、50 分发车, 乘客不知发车的时间, 在每小时内任一时刻到达车站是随机的。求乘客到车站等车时间的数学期望。

“连续型随机变量及其分布” 测验题

一、填空题

1. 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2x-x^2}$ 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率为_____。
2. 设 k 在 $(0, 5)$ 上服从均匀分布, 则 $4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$ 有实根的概率为_____。
3. 已知 (X, Y) 联合密度为 $f(x, y) = \begin{cases} c \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $c =$ _____, Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) =$ _____。
4. 随机变量 X 分布密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 X 的分布函数 $F(x) =$ _____。

二、选择题

1. 如下四个函数哪个可以作为随机变量 X 的分布函数()。

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases} & \text{(B)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases} \\ \text{(C)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases} & \text{(D)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + \frac{1}{3}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2. $X \sim N(1, 1)$, 概率密度为 $f(x)$, 则()。
 - (A) $P\{X \leq 0\} = P\{X \geq 0\} = 0.5$
 - (B) $f(x) = f(-x), x \in (-\infty, +\infty)$
 - (C) $P\{X \leq 1\} = P\{X \geq 1\} = 0.5$
 - (D) $F(x) = 1 - F(-x), x \in (-\infty, +\infty)$
3. X, Y 相互独立, 且都服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是()。
 - (A) (X, Y)
 - (B) $X+Y$
 - (C) X^2
 - (D) $X-Y$
4. 设函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, 则()。
 - (A) $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数
 - (B) 不是分布函数
 - (C) 离散型分布函数
 - (D) 连续型分布函数
5. 设 X, Y 是相互独立的两个随机变量, 它们的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$, 则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数是()。
 - (A) $F_Z(z) = \max\{F_X(z), F_Y(z)\}$
 - (B) $F_Z(z) = \max\{|F_X(z)|, |F_Y(z)|\}$
 - (C) $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$
 - (D) 都不是
6. 设 X, Y 是相互独立的两个随机变量, 其分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$, 则 $Z = \min(X, Y)$ 的分布函数是()。
 - (A) $F_Z(z) = F_X(z)$
 - (B) $F_Z(z) = F_Y(z)$
 - (C) $F_Z(z) = \min\{F_X(z), F_Y(z)\}$
 - (D) $F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$

7. 设 X 的密度函数为 $f(x)$, 而 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 则 $Y=2X$ 的概率密度是()。

- (A) $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$ (B) $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$ (C) $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ (D) $\frac{1}{\pi} \arctan y$

8. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $Z = \frac{X+Y}{2}$ 的分布密度是()。

- (A) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ (B) $f_Z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{x+y}{2}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

- (C) $f_Z(z) = \begin{cases} 4ze^{-2z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ (D) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

9. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则下列结论正确的是()。

- (A) $P\{X+Y \leq 0\} = 1/2$ (B) $P\{X+Y \leq 1\} = 1/2$ (C) $P\{X-Y \leq 0\} = 1/2$ (D) $P\{X-Y \leq 1\} = 1/2$

三、计算题

1. 随机变量 X 的密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 (1) 常数 c ; (2) X 落在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内的概率。

2. 设测量从某地到某一目标的距离时带有的随机误差 X 具有分布密度函数

$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

试求: (1) 测量误差的绝对值不超过 30 的概率;

(1) 接连独立测量三次, 至少有一次误差的绝对值不超过 30 的概率。

3. 设电子元件的寿命 X 具有密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & 100 < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。问在 150 小时内, (1) 三只元件中没有一只损坏的概率是多少? (2) 三只电子元件全损坏的概率是多少? (3) 只有一个电子元件损坏的概率是多少?

4. 对圆片直径进行测量, 其值在 $[5, 6]$ 上服从均匀分布, 求圆片面积的概率密度函数。

5. 设 (X, Y) 的密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x-y), & x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求: (1) $f_X(x)$; (2) $f(y|x)$; (3)

$f(y|x = \frac{1}{2})$ 。

习题八 r.v.的数学期望(II)、方差、协方差与相关系数

学号_____班级_____姓名_____

- 8.1 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且 $Z=3X-2$ ，则 $E(Z)=$ _____。
- 8.2 某公司经销某种原料，根据历史资料表明：这种原料的市场需求量 X （单位：吨）服从 $(300, 500)$ 上的均匀分布。每售出 1 吨该原料，公司可获利 1.5（千元）；若积压 1 吨，公司损失 0.5（千元）。问公司应该组织多少货源，可以使平均收益最大？
- 8.3 将 n 只球（1~ n 号）随机地放进 n 只盒子（1~ n 号）中去，一只盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 $E(X)$ 。
- 8.4 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$ ， $(-\infty < x < +\infty)$ ，求 $E(X)$ ， $D(X)$ 。
- 8.5 在长为 d 的线段上任选两点，求两点间距离的数学期望与方差。
- 8.6 已知 $E(X)=0$ ， $P\{|X| < 2\} = \frac{1}{2}$ ，且 $D(X)$ 存在，证明 $D(X) \geq 2$ 。

8.7 填空题

- (1) 设 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y = 2X + 1$, 则 $\rho_{XY} =$ _____。
- (2) 已知 $D(X) = 0.54$, $D(Y) = 0.25$, $\text{cov}(X, Y) = -0.03$, 则 $D(X+Y) =$ _____。
- (3) 随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件为_____;
- 随机变量 X 与 Y 不相关的充分必要条件为_____;
- 事件 A 与 B 互不相容的充分必要条件为_____;
- 事件 A 与 B 互为对立事件的充分必要条件为_____;
- 事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件为_____。

8.8 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$,

$\text{cov}(X, Y)$, ρ_{XY} , $D(X+Y)$ 。

8.9 已知三个随机变量 X, Y, Z 中, $E(X) = E(Y) = 1, E(Z) = -1, D(X) = D(Y) = D(Z) = 1, \rho_{XY} = 0$,

$\rho_{XZ} = \frac{1}{2}, \rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$ 。求 $E(X+Y+Z)$, $D(X+Y+Z)$ 。

8.10 假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 记

$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}, V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$ 。(1) 求 U 和 V 的联合分布; (2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ 。

“随机变量的数字特征” 测验题

一、填空题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $D(X) = 2$, $D(Y) = 4$, $D(2X - Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知随机变量 $X \sim N(-3, 1)$, $Y \sim N(2, 1)$, 且 X 与 Y 相互独立, $Z = X - 2Y + 7$, 则 $Z \sim \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设离散型随机变量 X 的取值是在两次独立试验中事件 A 发生的次数, 如果在这些试验中事件发生的概率相同, 并且已知 $E(X) = 0.9$, 则 $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 设随机变量 X 在区间 $[-1, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$, 则 $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 若随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且服从相同的两点分布 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$, 则 $X = \sum_{i=1}^3 X_i$ 服从 $\underline{\hspace{2cm}}$ 分布, $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$, $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 且 $X \sim N(0, 1)$, Y 在 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $\text{cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, f(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
 则 $E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 在 $[0, 6]$ 服从均匀分布, X_2 服从正态分布 $N(0, 2^2)$, X_3 服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布, 记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$, 则 $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、选择题

1. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, 记 $U = X - Y$, $V = X + Y$, 则 U 和 V 必然 ()。
 (A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关系数不为零 (D) 相关系数为零
2. 设离散型随机变量 X 可能取值为: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, 且 $E(X) = 2.3$, $E(X^2) = 5.9$, 则 x_1, x_2, x_3 所对应的概率为 ()。
 (A) $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.7$ (B) $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$
 (C) $p_1 = 0.3, p_2 = 0.5, p_3 = 0.2$ (D) $p_1 = 0.2, p_2 = 0.5, p_3 = 0.3$
3. 已知 X 和 Y 的联合分布如下表所示, 则有 ()。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

- (A) X 与 Y 不独立 (B) X 与 Y 独立
 (C) X 与 Y 不相关 (D) X 与 Y 彼此独立且相关
4. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 今每人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人抽得奖券的金额数学期望 ()。
 (A) 6 (B) 12 (C) 7.8 (D) 9
5. 设随机变量 X 和 Y 服从正态分布, $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, 记 $P_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $P_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则 ()。
 (A) 对任何 μ , 都有 $P_1 = P_2$ (B) 对任何实数 μ , 都有 $P_1 < P_2$
 (C) 只有 μ 的个别值, 才有 $P_1 = P_2$ (D) 对任何实数 μ , 都有 $P_1 > P_2$

6. 随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为()。

- (A) $E(X) = E(Y)$ (B) $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$
 (C) $E(X^2) = E(Y^2)$ (D) $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$

三、计算题

1. 设 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, k = 0, 1, 2, \dots, a > 0$, 试求 $E(X), D(X)$ 。

2. 设随机变量 X 具有概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 $E(X), D(X)$ 。

3. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(X, Y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P\{X=x, Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

求 $E\left[\sin \frac{\pi(X+Y)}{2}\right]$ 。

4. 一汽车沿一街道行驶需要通过三个设有红绿灯路口, 每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等, 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数。求(1)

X 的概率分布; (2) $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ 。

5. 设 (X, Y) 的分布密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$ 。

6. 设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 $E(X), D(Y), \rho_{xy}$ 。

7. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元, 发生一次故障仍可获利润 5 万元; 发生二次故障所获利润 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内期望利润是多少?

习题九 大数定律及中心极限定理

学号_____班级_____姓名_____

9.1 填空题

(1) 设 Y_n 是 n 次伯努利试验中事件 A 出现的次数, p 为 A 在每次试验中出现的概率, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X - Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$.

9.2 一部件包括 10 部分, 每部分的长度是一个随机变量, 他们相互独立, 且服从同一分布, 其数学期望为 2mm, 均方差为 0.05mm. 规定总长度为 (20 ± 0.1) mm 时产品合格, 试求产品合格的概率。

9.3 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近他的整数。设所有舍入误差是独立的且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布。(1) 若将 1500 个数相加, 问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少? (2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

9.4 设某车间有 200 台车床相互独立地工作着, 若因换料、检修等原因, 每台车床的开工率各为 0.6, 开工时耗电各为 1 千瓦, 问供电所至少要供给这个车间多少瓦电, 才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产?

9.5 现有一批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$ ，今任取 6000 粒，问能以 0.99 的概率保证在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 的差不超过多少？相应的良种粒数在哪个范围内？

9.6 某单位有 200 台电话分机，每台分机有 5%的时间要使用外线通话。假定每台分机是否使用外线是相互独立的，问该单位总机要安装多少条外线，才能以 90%以上的概率保证分机用外线时不等待？

9.7 在掷硬币实验中，至少掷多少次，才能使正面出现的频率落在 $(0.4, 0.6)$ 内的概率不小于 0.9？

9.8 某厂有 400 台同型机器，各台机器发生故障的概率均为 0.02，假如各台机器相互独立工作，试求机器出现故障的台数不少于 2 台的概率。

习题十 样本及抽样分布

学号_____班级_____姓名_____

10.1 从总体中抽得一个容量为 8 的样本, 其观测值如下: 99, 98, 100, 101, 98, 99, 102, 100。试求样本均值 $\bar{X}$, 样本二阶中心矩 B_2 及样本方差 S^2 的观测值。

10.2 设 $X_1, \dots, X_5$ 是 $X \sim N(12, 4)$ 的一个样本, 求 (1) $P\{|\bar{X} - E(X)| > 1\}$; (2) $P\{\min(X_1, \dots, X_5) < 10\}$ 。

10.3 设总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$ 。(1) 若 $X_1, \dots, X_{10}$ 为其一个样本, 试求 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$;
(2) 若 $X_1, \dots, X_{10}$ 与 $Y_1, \dots, Y_{15}$ 为其两个相互独立的样本, 试求 $P\{|\bar{X} - \bar{Y}| > 0.1\}$ 。

10.4 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, $Z = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$, 求常数 a, b , 使 Z 服从 χ^2 分布, 并求其自由度。

10.5 填空题

(1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 设 $X_1, \dots, X_9; Y_1, \dots, Y_9$ 分别是来自正态分布 $N(0, 5^2)$ 的两个相互独立的样本, 则统计量

$\frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}} \sim \underline{\hspace{2cm}}$, 参数为 $\underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{X_1^2 + \dots + X_9^2}{Y_1^2 + \dots + Y_9^2} \sim \underline{\hspace{2cm}}$, 参数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10.6 设在 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本, S^2 为其样本方差。(1) 求 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.04\}$; (2) 求 $D(S^2)$ 。

10.7 已知 $X \sim t(n)$, 求证 $X^2 \sim F(1, n)$ 。

10.8 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, μ, σ^2 已知。(1) 求统计量 $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ 的分布, 其中 $a_1, \dots, a_n$ 为常数; (2) 求统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{B_2/(n-1)}}$ 的分布, 其中 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

10.9 若 $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ 是来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

(1) 求统计量 $(\frac{n}{3}-1) \sum_{i=1}^3 X_i^2 / \sum_{i=4}^n X_i^2$ 的分布, 其中 $n \geq 4$; (2) 求统计量 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布。

10.10 设总体 $X \sim N(0, 1)$, X_1, X_2 是来自 X 的容量为 2 的样本。

(1) 证明: $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 相互独立; (2) 试求常数 C , 使 $P\{(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2})^2 > C\} = 0.1$ 。

习题十一 参数估计

学号_____班级_____姓名_____

11.1 (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知, 则 μ 的矩估计量为_____, σ^2 的矩估计量为_____;

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是几何分布总体 X 的一个样本, 即 $X \sim P\{X=x\} = (1-p)^{x-1}p, x=1, 2, \dots, 0 < p < 1, p$ 未知, 则 p 的矩估计量为_____。

11.2 设总体 X 服从二项分布 $B(m, p)$, 其分布律为 $P\{X=k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, k=0, 1, 2, \dots, m$, 其中 p 为未知参数, $0 < p < 1, X_1, \dots, X_n$ 为 X 的简单随机样本, 求 p 的矩估计量。

11.3 设 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 $\theta > -1$ 未知, $X_1, \dots, X_n$ 为 X 的样本, 求 θ 的矩估计量。

11.4 (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知, 则 μ 的极大似然估计量为_____, σ^2 的极大似然估计量为_____;

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是几何分布总体 X 的一个样本, 即 $X \sim P\{X=x\} = (1-p)^{x-1}p, x=1, 2, \dots, 0 < p < 1, p$ 未知, 则 p 的极大似然估计量为_____。

11.5 已知总体 X 服从 $P(\theta)$, 其分布律为 $P\{X=k\} = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \theta > 0, k=0, 1, 2, \dots, X_1, \dots, X_n$ 是 X 的样本. (1)求 θ 的矩估计量; (2)求 θ 的极大似然估计量; (3)求 $p = P\{X=0\}$ 的极大似然估计量。

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

11.6 设 X 的分布律为 $\frac{X}{P}$ 如上表, 其中 $\theta(0 < \theta < \frac{1}{2})$ 未知, $X_1, \dots, X_n$ 为 X 的样本. (1) 求 θ 的矩估计量; (2) 利用样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3 求 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

11.7 总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$, θ 、 μ 均未知, $X_1, \dots, X_n$ 为 X 的简单随机

样本。分别求 θ 、 μ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 、 $\hat{\mu}_M$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 、 $\hat{\mu}_L$ 。

11.8 设总体 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$ 未知参数 $\beta > 1$, $X_1, \dots, X_n$ 为 X 的简单随机样本。分别求 β 的矩估计量和极大似然估计量。

11.9 设总体 X 的对数函数 $\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是来自该总体的一个简单随机样本, 求 μ , σ^2 及 $E(X)$ 的极大似然估计量。

习题十二 估计量的评选标准

学号_____班级_____姓名_____

12.1 设 $X_1, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, $c_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, 试证明 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是 $E(X)$ 的无偏估计量。

12.2 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 试确定常数 C 使 $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

12.3 设简单随机样本 $X_1, \dots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 试求常数 k 使 $\hat{\sigma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ 为 σ 的无偏估计量。

12.4 从总体 X 中抽取样本 X_1, X_2, X_3 , 构造三个统计量如下:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3; \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

(1) 证明 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 都是总体均值 $E(X) = \mu$ 的无偏估计量; (2) 判断 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 哪个更有效?

12.5 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ 已知，试证明

$S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

12.6 设有两总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ，分别从两总体中抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立的样本，样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 。试证：对任意常数 a, b ，如果 $a+b=1$ ，则 $Z = aS_1^2 + bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计量，并确定使 $D(Z)$ 达到最小的 a, b 。

12.7* 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ， $X_1, \dots, X_{2n}$ 是其容量为 $2n$ 的简单随机样本 ($n \geq 2$)，其样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ ，已知 $\hat{\sigma}^2 = C \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ ，试确定常数 C 使其成为 σ^2 的无偏估计量。

习题十三 参数区间估计

学号_____班级_____姓名_____

13.1 设 $X_1, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本, X 的概率函数为 $f(x; \theta)$, θ 为未知参数, 已知存在统计量 $\theta_1 = \theta_1(X_1, \dots, X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, \dots, X_n)$ 和正数 α : $0 < \alpha < 1$, 使得 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$, 则称区间 (θ_1, θ_2) 是 θ 的_____ ; $1 - \alpha$ 是_____ ; 给定 $1 - \alpha$, (θ_1, θ_2) 的长度 $L = \theta_2 - \theta_1$ 是_____越好。

13.2 设某种清漆的9个样品, 其干燥时间(小时)分别为

6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 在下列条件下分别求出 μ 的置信度为95%的置信区间:

(1) $\sigma = 0.6$ (小时); (2) 若 σ 未知。

13.3 已知一批产品的长度指标 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$, 要使样本均值 $\bar{X}$ 与总体均值 μ 的误差在置信度为0.95的情况下小于0.1, 问至少应抽取多大容量的样本?

13.4 随机地选取某种炮弹9发做试验, 测得炮口速度的样本标准差 $s = 11$ (m/s), 设炮口速度服从正态分布, 分别求炮口速度的方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为95%的置信区间。

13.5 就 13.2 题中的两种情况分别求出 μ 的置信度为 95% 的单侧置信上限和单侧置信下限。

13.6 现有两批导线，随机地从 A 批导线中选取 4 根，从 B 批导线中选取 5 根，测得电阻值（欧）分别为

A 批：0.143, 0.142, 0.143, 0.137; B 批：0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140

设两组导线的电阻分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ ，方差相等，两样本相互独立， μ_1, μ_2, σ^2 均为未知，试求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间。

13.7 两化验员 A、B 各自独立地用相同的方法对某种聚合物的含氯量各做 10 次测量，分别求得测定值的样本方差为 $S_A^2 = 0.5419$, $S_B^2 = 0.6965$ 。设测定值总体分别服从正态分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ ，试求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 95% 的置信区间。

13.8 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$ 。

(1) 试求 X 的数学期望 $E(X)$ (记 $E(X) = b$)；(2) 试求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；(3) 利用上述结果求 b 的置信水平 0.95 的置信区间。

习题十四 单正态总体参数的假设检验

学号_____班级_____姓名_____

14.1 (1) 假设检验的理论依据是_____。

(2) 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验, 如果在显著性水平 0.05 下接受假设 $H_0: \mu = \mu_0$, 那么在显著性水平 0.01 下, 下列结论中正确的是 ()。

(A) 必接受 H_0 (B) 可能接受, 也可能拒绝 H_0 (C) 必拒绝 H_0 (D) 不接受, 也不拒绝 H_0

(3) 在假设检验中, 记 H_1 为备择假设, 则称 () 为犯第 I 类错误。

(A) H_1 为真接受 H_1 (B) H_1 不真接受 H_1 (C) H_1 为真拒绝 H_1 (D) H_1 不真拒绝 H_1

14.2 设某产品的某项指标服从正态分布, 已知它的标准差 $\sigma = 150$. 现从一批产品中随机抽取 26 个, 测得该项指标的平均值为 1637. 问能否认为这批产品的该项指标值为 1600 ($\alpha = 0.05$)?

14.3 某测距仪在 500 米范围内, 测距精度 $\sigma = 10$ 米. 今对距离 500 米的目标测量 9 次, 得到平均距离 $\bar{x} = 510$ 米. 设测量的距离服从正态分布, 问该测距仪是否存在系统误差 ($\alpha = 0.05$)?

14.4 某药厂生产一种抗菌素, 已知在正常生产情况下, 每瓶抗菌素的某项指标服从均值为 23.0 的正态分布. 某日开工后随机抽取 5 瓶, 测得数据如下: 22.3, 21.5, 22.0, 21.8, 21.4. 问该日生产是否正常 ($\alpha = 0.05$)?

14.5 某厂生产的某种型号的电池，其寿命（以小时计）长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布。现有一批该型号电池，从它的生产情况看，寿命的波动性有所改变。现随机抽取 26 只电池，测得其寿命的样本方差 $S^2=9200$ ，问根据这一数据能否推断这批电池寿命的波动性较以往有显著的变化（取 $\alpha=0.05$ ）？

14.6 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(1.405, 0.048^2)$ ，某日抽取 5 根纤维，测得其纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44。问这一天纤度的总体标准差是否正常（ $\alpha = 0.05$ ）？

14.7 某厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu=40\text{cm/s}$ ， $\sigma=2\text{cm/s}$ 。现用新方法生产了一批推进器，从中随机抽取 25 只，测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x}=41.25\text{ cm/s}$ 。设在新方法下总体标准差仍为 2 cm/s ，问这批推进器是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著提高？（ $\alpha=0.05$ ）

14.8* 某车间有一台包装机包装葡萄糖。包得的袋装糖重是一个随机变量，它服从正态分布。当机器工作正常时，其均值为 0.5 公斤，标准差为 0.015 公斤。某日开工后为检查包装机是否正常，随机抽取它所包装的糖 9 袋，称得净重为（公斤）：0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512。问这天该机器工作是否正常（ $\alpha = 0.05$ ）？

习题十五 双正态总体参数的假设检验与 χ^2 -检验

学号_____班级_____姓名_____

15.1 对两种羊毛织品的强度进行试验所得结果如下（磅 / 平方英寸）：

第一种：138, 127, 134, 125；第二种：134, 137, 135, 140, 130, 134；

设两种羊毛织品的强度服从方差相同的正态分布。问是否可得结论：一种羊毛较另一种羊毛好（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.2 有两箱灯泡，从第一箱中取 9 只测试，算得其平均寿命为 1532 小时，标准差为 423 小时；从第二箱中取 18 只测试，算得其平均寿命为 1412 小时，标准差为 380 小时。设两箱灯泡寿命都服从正态分布，且方差相等。试判断是否可以认为这两箱灯泡是同一批生产的？（ $\alpha = 0.05$ ）

15.3 两台机床加工同一种零件，分别取其 6 个和 9 个，量其长度计算得 $s_1^2 = 0.345$, $s_2^2 = 0.357$ 。假定零件长度服从正态分布，问是否可以认为这两台机床加工的零件长度的方差无显著差异（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.4 有甲、乙两台机床加工同一种产品，从这两台机床加工的产品中抽取若干产品，测得直径（单位：mm）为：

机床甲：20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9；机床乙：19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

假定产品直径均服从正态分布，试比较甲、乙两机床加工的精度有无显著差异（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.5 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_{n_1}$ 为来自总体 X 的一个样本, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 为来自总体 Y 的一个样本, 两样本相互独立, 参数均未知。试构造出原假设 $H_0: \mu_1 = C\mu_2$ 的一个水平为 α 的检验, 这里 C 为不为零的已知常数。

15.6 从甲、乙两校的高考英语试卷中各抽 27 份和 26 份, 其英语平均成绩分别为甲校 67 分, 乙校 71 分, 样本标准差分别为甲校 8 分, 乙校 6 分。假定学生的英语成绩均服从正态分布, 试问两校英语成绩有无显著差异 ($\alpha = 0.05$) ?

15.7* 对某汽车零件制造厂所生产的汽缸螺栓口径进行 100 次抽样检查, 得 100 个数据, 分组列表如下:

组 限	频 数	组 限	频 数
10.93~10.95	5	11.01~11.03	17
10.95~10.97	8	11.03~11.05	6
10.97~10.99	20	11.05~11.07	6
10.99~11.01	34	11.07~11.09	4

试检验螺栓口径是否服从正态分布 ($\alpha = 0.05$)。

“数理统计” 测验题

- 一、1. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3, X_4 为来自 X 的样本, 则统计量 $\frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_3 - X_4)^2}$ 的分布为_____。
2. 若总体 X 的一个样本值为 0,0,1,1,0,1, 则总体均值的矩估计值为_____, 总体方差的矩估计值为_____。
3. 对正态总体若方差 σ^2 未知, $H_0: \mu = \mu_0$, 应选取统计量_____, 在_____条件下, 统计量服从自由度为_____的_____分布。

二、选择题

1. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 为来自该总体的一个简单随机样本, $\bar{X}$ 、 S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有 ()。

(A) $\bar{X} \sim N(0, 1)$ (B) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$ (C) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $\bar{X}/S \sim t(n-1)$

2. θ 为总体 X 的未知参数, θ 的估计量为 $\hat{\theta}$, 则有 ()。

(A) $\hat{\theta}$ 是一个数, 近似等于 θ (B) $\hat{\theta}$ 是一个随机变量
(C) $\hat{\theta}$ 是一个统计量, 且 $E(\hat{\theta}) = \theta$ (D) 当 n 越大, $\hat{\theta}$ 的值可任意靠近 θ

3. 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 未知) 的假设检验问题: $H_0: \mu \leq 1$, $H_1: \mu > 1$, 若取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则其拒绝域为 ()。

(A) $|\bar{X} - 1| > z_{0.05}$ (B) $\bar{X} > 1 + t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ (C) $|\bar{X} - 1| > t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ (D) $\bar{X} < 1 - t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

- 三、1. 在测量反应时间中, 一名心理学家估计的标准差为 0.05s, 为了以 95% 的置信水平使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01s, 应取多大的样本容量?

2. 设 θ 为总体 X 的未知参数, 其密度函数为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。又设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总

体 X 的样本, 试求: (1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$; (2) $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$ 。

3. 从自动机床加工的同类零件中抽取 16 个, 测得长度值为 (单位: mm): 12.15, 12.12, 12.01, 12.28, 12.09, 12.16, 12.03, 12.06, 12.01, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.03, 12.01, 12.13, 若可认为这是来自正态总体的样本观测值。求总体标准差 σ 的置信水平位 0.99 的置信区间。

4. 某纯净水生产厂用自动灌装纯净水, 该自动灌装机正常灌装量 $X \sim N(18, 0.4^2)$, 现测量某厂 9 个灌装样品的灌装量 (单位: L) 为: 18.0, 17.6, 17.3, 18.2, 18.1, 18.5, 17.9, 18.1, 18.3。在显著性水平 0.05 下, 试问该天灌装是否合格?

5. 某项考试要求成绩的标准差为 12 分, 现从考试成绩单中任取 15 份, 计算样本标准差为 16 分。设成绩服从正态分布, 问此次考试的标准差是否不合要求 ($\alpha = 0.05$)?

6. 设总体 X 的数学期望为 μ , 方差为 σ^2 , $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ 分别是来自 X 的两个独立样本。

证明 $S^2 = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2]$ 是 σ^2 的无偏估计。

河海大学 2020-2021 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 3 分，本大题共六小题满分 18 分）

1. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x\}=a\frac{\lambda^x}{x!}$, $x=0, 1, 2, \dots$, 其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则常数 $a=$ _____;
2. 随机变量 $X \sim B(10, 0.2)$, $Y \sim N(0, 4)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $D(X-2Y)=$ _____;
3. 设事件 A, B 满足 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$, 且 $P(AB)$ 取到最小值, 则 $P(A \cup B)=$ _____;
4. 假设检验中, 由样本观察值判断假设 H_0 正确性的依据是 _____;
5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 且 $E(X)=0$, 试写出 $E(X^2)$ 的一个无偏估计量 _____;
6. 随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} 25xe^{-5x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 则 $Y=10X \sim \chi^2(\text{_____})$ 分布 (填数字).

【注: $\chi^2(n)$ 密度函数 $f(t)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ 】

二、(本题满分 10 分) 仓库中有 10 件产品, 已知其中特等品件数可能是 1 件, 2 件, 3 件这三种情形, 且特等品件数是 1 件, 2 件, 3 件的可能性相同. 现作放回抽样, 每次从仓库中随机抽取 1 件产品, 共连续抽取两次.

1. 求两次都抽到特等品的概率;
2. 若已知第二次抽到了特等品, 求第一次也抽到了特等品的概率.

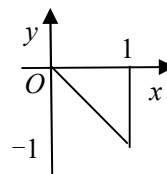
三、(本题满分 12 分) 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

求: 1. 常数 k ; 2. $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$; 3. 概率 $P\{X > 0.1\}$.

四、(本题满分 16 分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的在区域 $D=\{(x, y)|0 < x < 1, -x < y < 0\}$ 上服从均匀分布, 求:

1. X 与 Y 的联合密度函数 $f(x, y)$;
2. X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$;
3. $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.



五、(本题满分 16 分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x; \theta)=\begin{cases} \frac{2}{\theta^2}x, & 0 < x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的样本, 求:

1. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$;
2. 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$;
3. 讨论矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 是否为 θ 的无偏估计量.

六、(本题满分 14 分) 随机地从一批钉子中抽取 9 枚, 测得其长度(单位: 毫米) 如下:

49.6 49.3 50.1 50.0 49.2 49.9 49.8 51.0 50.2

设这批钉子的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

1. 若 $\sigma > 0$ 未知, 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 50, H_1: \mu \neq \mu_0$ (取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

2. 若已知 $\sigma = 0.3$, 求 μ 的置信度为 95% 的双侧置信区间.

【注: 本题样本均值 $\bar{x} = 49.9$, 样本标准差 $s = 0.53$. 部分标准正态分布表和 t 分布表如下】

七、(本题满分 14 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

定义随机变量 Y_1, Y_2 为

$$Y_k = \begin{cases} 0, & X \leq k \\ 1, & X > k \end{cases}, \quad k = 1, 2$$

1. 求 Y_1 和 Y_2 的联合分布律;

2. 问 Y_1 与 Y_2 是否相互独立? 请给出计算依据;

3. 证明: $E(Y_1 Y_2) > E(Y_1) \cdot E(Y_2)$.

参考解答

一. 1. $e^{-\lambda}$; 2. 17.6; 3. 1; 4. 小概率(事件)原理; 5. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 或 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 等; 6. 4;

二. 设 $A_i (i=1,2)$ ——第 i 次抽到特等品, $B_j (j=1,2,3)$ ——10 件产品中有 j 件特等品

$$1. P(A_1 A_2) = \sum_{j=1}^3 P(A_1 A_2 | B_j) P(B_j) = \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{7}{150} \approx 0.047;$$

$$2. P(A_2) = P(A_2 \Omega) = P(A_2 (A_1 \cup \bar{A}_1)) = P(A_1 A_2 \cup \bar{A}_1 A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) - 0$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = \sum_{j=1}^3 P(\bar{A}_1 A_2 | B_j) P(B_j) = \left(\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{23}{150}$$

$$\text{故 } P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{7/150}{7/150 + 23/150} = \frac{7}{30} \approx 0.233 \text{ 为所求.}$$

$$\text{三. 1. 由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} k e^{-4x} dx, \quad 1 = k \cdot \frac{1}{-4} e^{-4x} \Big|_0^{+\infty} \Rightarrow k = 4$$

$$2. \forall y \in R, F_{X^2}(y) = P\{X^2 \leq y\} = \begin{cases} P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} 4e^{-4x} dx = 1 - e^{-4\sqrt{y}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$3. P\{X > 0.1\} = \int_{0.1}^{+\infty} f(x) dx = \int_{0.1}^{+\infty} 4e^{-4x} dx = e^{-0.4}.$$

$$\text{四. 1. 设 } f(x, y) = \begin{cases} A, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 由 } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1, \text{ 有}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{R^2-D} f(x, y) dx dy = \iint_D A dx dy + 0 = A \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow A = 2$$

$$\text{故 } f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$2. f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^0 2 dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 2 dx = 2(1+y), & -1 < y < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$3. F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy$$

$$= \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \int_0^z dx \int_x^0 2dy + \int_z^1 dx \int_{-x}^{z-x} 2dy & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} \text{ 或 } 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (1-z)^2 \right], \quad 0 < z < 1$$

$$= \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 2-2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{五. 1. } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{2}{\theta^2} x dx = \frac{2}{3} \theta = \bar{X}, \text{ 故 } \hat{\theta}_M = \frac{3}{2} \bar{X}$$

2. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观测值,

$$\text{当 } 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta, \text{ 有 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \left(\frac{2}{\theta^2} \right)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 已知时, $L(\theta)$ 取最大值, 需要 θ 最小, 而 $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta$,

$$\text{故 } \hat{\theta}_{MLE} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$3. E(\bar{X}) = E(X) = \frac{2}{3} \theta, \text{ 所以 } E\left(\frac{3}{2} \bar{X}\right) = E(X) = \theta, \text{ 即 } \frac{3}{2} \bar{X} \text{ 为 } \theta \text{ 无偏估计.}$$

$$\text{六. 1. 对假设 } H_0: \mu = \mu_0 = 50, H_1: \mu \neq \mu_0, \text{ 取检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{ 为真}}{\sim} t(n-1)$$

由 $P\{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\} = \alpha$, 得拒绝域为 $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$.

$$\text{又 } n=9, \bar{x}=49.9, s=0.53, \alpha=0.05, t_{0.025}(8)=2.3060, T = \frac{|49.9-50|}{0.53/\sqrt{9}} = 0.566 < 2.3060$$

故接受 H_0 .

2. 因为 $\sigma=0.3$ 已知, 故总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \text{ 又 } z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96, \text{ 故}$$

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(49.9 - 1.96 \times \frac{0.3}{3}, 49.9 + 1.96 \times \frac{0.3}{3} \right) = (49.704, 50.096).$$

七. 1. Y_1, Y_2 分别取 0, 1

$$P\{Y_1=0, Y_2=0\} = P\{X \leq 1\} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}, \quad P\{Y_1=0, Y_2=1\} = 0$$

$$P\{Y_1=1, Y_2=0\} = P\{1 < X \leq 2\} = \int_1^2 e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P\{Y_1=1, Y_2=2\} = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-2}$$

故 (Y_1, Y_2) 的联合分布律如右表

Y_2	0	1
Y_1		
0	$1 - e^{-1}$	0
1	$e^{-1} - e^{-2}$	e^{-2}

$$2. Y_1 \text{ 的分布律 } P\{Y_1=0\} = P\{X \leq 1\} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}, \quad P\{Y_1=1\} = P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$$

$$Y_2 \text{ 的分布律 } P\{Y_2=0\} = P\{X \leq 2\} = \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-2}, \quad P\{Y_2=1\} = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-2}$$

$$\text{而 } P\{Y_1=0, Y_2=0\} = 1 - e^{-1} \neq P\{Y_1=0\}P\{Y_2=0\} = (1 - e^{-1})(1 - e^{-2})$$

故 Y_1, Y_2 不相互独立.

$$3. E(Y_1 Y_2) = 1 \cdot e^{-2}, \quad E(Y_1) \cdot E(Y_2) = 1 \cdot e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-2} = e^{-1} \cdot e^{-2}$$

$$\text{而 } 1 > e^{-1}, 1 \cdot e^{-2} > e^{-1} \cdot e^{-2}, \text{ 故 } E(Y_1 Y_2) > E(Y_1) \cdot E(Y_2).$$

河海大学 2021-2022 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 4 分，本题满分 32 分）

1. 设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A) = P(B) = 0.4$ ，则 $P(A \cup B) =$ _____。

2. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$ ，又设 $Y = 2X - 1$ ，则 $Y \sim$ _____。

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

若 X 与 Y 独立，则 $\alpha =$ _____， $\beta =$ _____。

4. 将编号为 1,2,3 的球随机地放入编号为 1,2,3 的盒子，每个盒子只放入一个球，若球的编号与盒子编号一致，则称一个配对，记 X 为总配对数，则 $EX =$ _____， $DX =$ _____。

5. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，且 $EX = \frac{3}{5}$ ，则 $a =$ _____， $b =$ _____。

6. 设总体 X 服从二项分布 $X \sim B(m, p)$ ， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，则 $E\bar{X} =$ _____， $D\bar{X} =$ _____。

7. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是总体 $N(0, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的一个样本，若统计量 $T = c \frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_4 - X_5|}$ 服从 t -分布，则常数 $c =$ _____，并指出其自由度为_____。

8. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 未知， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，则假设检验问题：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

的检验统计量为_____，拒绝域为_____。

二、(本题满分 10 分) 飞机轰炸某目标，设它能飞到距目标 500 米、200 米、100 米附近的概率分别为 0.5, 0.4, 0.1。又设距目标 500 米、200 米、100 米附近投弹命中率分别为 0.2, 0.5, 0.8。(1) 求目标被命中的概率；(2) 若目标被命中，求飞机是在 200 米处投弹的概率。

三、(本题满分 10 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ (1) 求 $Y = 2X + 1$ 的密度函数；(2) 求 $Z = X^2$ 的分布函数。

四、(本题满分 10 分) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布于 $N(\mu, \sigma^2)$ ，令

$$U = aX - bY, \quad V = aX + bY$$

其中 μ, σ, a, b 为常数， $\sigma > 0$ 。(1) 求 EU, DU ；(2) 求 U, V 的相关系数 ρ_{UV} 。

五、(本题满分 12 分) 设 X, Y 独立同分布于参数为 λ ($\lambda > 0$) 的指数分布，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数; (2) 求 $Z = \min(X, Y)$ 的密度函数。

六、(本题满分 14 分) 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布 $X \sim P(\lambda)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的一个样本,

(1) 求 λ 的矩估计量; (2) 求 λ 的极大似然估计量; (3) 证明: $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是 λ 的无偏估计量。

七、(本题满分 12 分) 设某种油漆的干燥时间 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现测得 9 个样本, 其干燥时间分别为:

6.8, 5.6, 6.6, 5.8, 6.7, 6.5, 5.5, 7.0, 6.1

其样本均值为 $\bar{x} = 6.289$, 样本标准差为 $s = 0.552$ 。

(1) 求均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间。(2) 对假设检验问题:

$$H_0: \mu = 6.0, \quad H_1: \mu \neq 6.0,$$

是否接受 H_0 ? (取显著性水平 $\alpha = 0.05$) . ($t_{0.025}(8) = 2.306$, $t_{0.025}(9) = 2.262$)

参考答案

一、1. 0.64; 2. $N(-1, 4)$; 3. $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$; 4. 1, 1; 5. $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}$; 6. $mp, \frac{m}{n}p(1-p)$; 7. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, 1$;

8. $\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, $\eta \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或者 $\eta \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

二、记飞到距目标 500 米、200 米、100 米附近分别为 A_1, A_2, A_3 , 目标被命中为 B , 则

$$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.4, P(A_3) = 0.1, P(B|A_1) = 0.2, P(B|A_2) = 0.5, P(B|A_3) = 0.8,$$

(1) $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$

$$= 0.2 \times 0.5 + 0.5 \times 0.4 + 0.8 \times 0.1 = 0.38$$

$$(2) P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.5 \times 0.4}{0.38} = \frac{10}{19} \approx 0.526,$$

三、(1) 由 $Y = 2X + 1$ 得, $X = \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}$, 故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}, & -1 < \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -1 < y < 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$; 当 $z \geq 0$ 时,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z})$$

$$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f(x) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{3} dx, & 0 \leq z < 1 \\ \int_{-1}^{\sqrt{z}} \frac{1}{3} dx, & 1 \leq z < 4 \\ 1, & z \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{z}}{3}, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{\sqrt{z}+1}{3}, & 1 \leq z < 4 \\ 1, & z \geq 4 \end{cases}$$

四、(1) $EU = aEX - bEY = a\mu - b\mu = (a - b)\mu$ $DU = a^2DX + b^2DY = (a^2 + b^2)\sigma^2$

(2) $Cov(U, V) = Cov(aX - bY, aX + bY) = a^2DX - b^2DY + abCov(X, Y) - abCov(Y, X)$
 $= (a^2 - b^2)\sigma^2$

$DV = a^2DX + b^2DY = (a^2 + b^2)\sigma^2$ 故 $\rho_{UV} = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{(a^2 - b^2)\sigma^2}{(a^2 + b^2)\sigma^2} = \frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)}$

五、(1) 当 $z > 0$ 时, $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)f(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$

当 $z \leq 0$ 时, $f_z(z) = 0$

(2) $F_N(z) = P\{Z \leq z\} = 1 - P\{Z > z\} = 1 - P\{\min(X, Y) > z\} = 1 - [(1 - F(z))]^2$

$= \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$, 故 $f_z(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

六、(1) 泊松分布的分布律为 $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

由 $EX = \lambda = \bar{X}$ 得 λ 的矩法估计量 $\hat{\lambda} = \bar{X}$

(2) 似然函数 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{x_1! \cdots x_n!}$, $\ln L(\lambda) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1! \cdots x_n!)$

令 $\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = (\sum_{i=1}^n x_i) \frac{1}{\lambda} - n = 0$ 得 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$ 【5分】

(3) $E(B_2) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2] = EX^2 - E\bar{X}^2 = EX^2 - D\bar{X} - (E\bar{X})^2$

$= [EX^2 - (EX)^2] - D\bar{X} = DX - \frac{1}{n}DX = \frac{n-1}{n}DX = \frac{n-1}{n}\lambda \neq \lambda$

故 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是 λ 的无偏估计量。

七、(1) 均值 μ 的置信区间为 $\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}$

代入数据得 μ 的置信度为 95% 的置信区间 $6.289 \pm 2.306 \times 0.552/\sqrt{9}$, 即 (5.865, 6.713)

(2) 根据题意检验假设 $H_0: \mu = 6.0, H_1: \mu \neq 6.0$, 由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 σ^2 未知,

令检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - 6}{S/\sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{ 为真}}{\sim} t(n-1)$, 由 $P(|T| > t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$ 得拒绝域为 $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$,

又 $\bar{x} = 6.289, s = 0.552, \alpha = 0.05, t_{0.025}(8) = 2.306$,

所以 $|T| = \left| \frac{6.289 - 6.0}{0.552/\sqrt{9}} \right| = 1.571 < t_{0.025}(8) = 2.306$, 接受 H_0 ,

一、填空题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

1. 已知 $P(A) = p, P(B) = q, P(A \cup B) = p + q, 0 < p < 1, 0 < q < 1$, 则 $P(\bar{A} \cup B) =$ _____。

2. 设随机变量 $X \sim B(3, 0.4)$, 随机变量 $Y = \frac{X(5-X)}{3}$, 则 $P\{Y = 2\} =$ _____。

3. 设 $X \sim U[-1, 2]$, 令 $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$ 则 $EY =$ _____, $DY =$ _____。

4. X, Y 的方差分别为 25、16, 相关系数为 0.4, 则 $D(2X - Y) =$ _____。

5. 设随机变量 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 则随机变量 $Y = 3 - X$ 在 $(2, 4)$ 内的概率密度

$f_Y(y) =$ _____。

6. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \dots, X_6)$ 是取自总体 X 的样本, 设

$$Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 + (X_5 + X_6)^2,$$

则当 $C =$ _____时, CY 服从 χ^2 分布, 自由度为_____。

7. 设随机变量 $X \sim t(n)$, ($n > 1$), $Y = \frac{1}{X^2}$, 则 Y 服从于何种分布_____。(需写出自由度)。

二、(本题满分 10 分) 血液试验 ELISA 是现今检测艾滋病病毒的一种流行方法, 假定 ELISA 试验能正确测定出确实带有艾滋病病毒的人中的 95% 存在艾滋病病毒, 又把不带病毒的人中 1% 不正确地识别为存在艾滋病病毒。假定在总人口中大约 1/1000 的人带有艾滋病病毒, 如果对某人检验结果为阳性 (即认为带有该病毒), 那么他真的带有该病毒的概率有多大?

三、(本题满分 10 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 b ; (2) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立。

四、(本题满分 10 分) 维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 服从均匀分布, 且

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ 0, & X - Y \leq 0, \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0, \\ 0, & X + Y \leq 0, \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$; (2) 求 Z_1 和 Z_2 的联合分布律; (3) 求 $COV(Z_1, Z_2)$ 。

五 (本题满分 12 分) 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) $P(X > 2Y)$; (2) $Z = X + Y$ 的密度函数。

六. (本题满分 14 分) 设 X 的分布律为:

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 X 的一组样本,

(1) 求 θ 的矩估计量; (2) 利用样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

七 (本题满分 14 分) 设某种有机溶剂的 9 个样本中, 成分 A 的含量 (g/L) 分别为:

6.0、5.7、5.8、6.5、7.0、6.3、5.6、6.1、5.0。

设成分 A 的含量总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,

(1) 求 μ 的置信度为 95% 的双侧置信区间; (2) 求 σ^2 的置信度为 95% 的双侧置信区间。

(参考: $z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(9) = 1.8331, t_{0.05}(8) = 1.8595,$

$t_{0.025}(9) = 2.2622, t_{0.025}(8) = 2.3060, \chi_{0.05}^2(8) = 15.507,$

$\chi_{0.05}^2(9) = 16.919, \chi_{0.025}^2(8) = 17.534, \chi_{0.025}^2(9) = 19.022,$

$\chi_{0.95}^2(8) = 2.733, \chi_{0.95}^2(9) = 3.325, \chi_{0.975}^2(8) = 2.180, \chi_{0.975}^2(9) = 2.700,$

样本均值 $\bar{X} = 6.0$ g/L, 样本标准差 $s = 0.5745$ g/L, 样本方差 $s^2 = 0.3300$ g²/L²)

八、(本题满分 9 分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $0 < \theta < 1$ 为未知参数, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是取自总体 X 的样本, $\bar{X}$ 为样本均值。

(1) 求 $E(X)$, $D(X)$; (2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由。

参考解答

一、1. $1-p$; 2. 0.352; 3. $\frac{1}{3}, \frac{8}{9}$; 4. 84; 5. $\frac{3}{2}(3-y)^2$; 6. $\frac{1}{2\sigma^2}, 3$; 7. $F(n, 1)$ 。

二、解: 设 $A = \{\text{确实带有病毒}\}$, $B = \{\text{检验为阳性}\}$,

由题设知: $P(A) = 1/1000, P(B|A) = 0.95, P(B|\bar{A}) = 0.01$ 。

$$\text{于是: } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{1}{1000} \cdot 0.95}{\frac{1}{1000} \cdot 0.95 + \frac{999}{1000} \cdot 0.01} = 0.087.$$

三、解: (1) 根据 $b \iint f(x, y) dx dy = b \int_0^1 e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = b(1 - e^{-1}) = 1$, 得: $b = \frac{1}{1 - e^{-1}}$;

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}} \quad (0 < x < 1);$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-(x+y)} dx = e^{-y}, \quad (0 < y < +\infty)$$

因为 $f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$, 所以随机变量 X 与 Y 相互独立。

四、解：(1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{s_D} = \frac{2}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

(2)

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1
0	1/4	1/2
1	0	1/4

(3) $E(Z_1)=1/4, E(Z_2)=3/4, E(Z_1Z_2)=1/4, \text{COV}(Z_1, Z_2)=1/16$

五、(1) $P(X > 2Y) = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x/2} (2-x-y) dy = \frac{7}{24}$.

(2)法一, $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy =$

$$\begin{cases} 0, z \leq 0 \\ \int_0^z dx \int_0^{z-x} (2-x-y) dy = z^2 - z^3, 0 < z \leq 1, \\ \int_0^{z-1} dx \int_0^1 (2-x-y) dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} (2-x-y) dy = 1 - \frac{(2-z)^3}{3}, 1 < z \leq 2, \\ 1, z > 2. \end{cases}$$

于是 $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} z(2-z), 0 < z \leq 1, \\ (2-z)^2, 1 < z \leq 2, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$

法二, 由题意 $f(z-y, y) = \begin{cases} 2-z, y < z < 1+y, 0 < y < 1, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$

于是

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \begin{cases} \int_0^z (2-z) dy = z(2-z), 0 < z \leq 1, \\ \int_{z-1}^1 (2-z) dy = (2-z)^2, 1 < z \leq 2, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

六、解：(1) $\because E(X) = 0 \cdot \theta^2 + 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3(1-2\theta) = 3-4\theta = \bar{X};$

可知 θ 的矩估计量为: $\hat{\theta} = \frac{3-\bar{X}}{4}$.

(2) θ 的矩估计值为: $\hat{\theta} = \frac{3-\bar{X}}{4} = \frac{1}{4}$.

似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^8 P(X_i = x_i; \theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$

由 $\frac{d \ln L}{d \theta} = 0$, 得 $3-14\theta+12\theta^2=0$, 考虑到 θ 的取值范围为(0,1/2),

知 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

七、解：(1) $\left(\bar{X} - t_{0.025}(8) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{0.025}(8) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$

算得: $(6.0-2.3060 \cdot \frac{0.5745}{\sqrt{9}}, 6.0+2.3060 \cdot \frac{0.5745}{\sqrt{9}})$, 即: $(5.5584, 6.4416)$ 。

(2) $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(8)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(8)} \right)$ 算得: $\left(\frac{8 \cdot 0.33}{17.534}, \frac{8 \cdot 0.33}{2.180} \right)$, 即: $(0.1506, 1.2110)$ 。

八、解：(1) $E(X) = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2},$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx - \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{12} - \frac{\theta}{12} + \frac{5}{48}.$$

$$(2) E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4\{D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2\} = 4\left\{\frac{D(X)}{n} + [E(X)]^2\right\} = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+5}{12} \neq \theta^2,$$

所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

河海大学 2022-2023 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每题 3 分，本题满分 24 分）

1. 已知 A, B, C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，且 A 与 C 互不相容，且 B 与 C 相互独立，

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}, \text{ 则 } P[(B \cup C)|(A \cup B \cup C)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设随机变量 $X \sim B(3, 0.4)$ ，随机变量 $Y = \frac{X(5-X)}{3}$ ，则 $P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设随机变量 $X_i (i=1, 2)$ 的分布律为 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ，且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$ ，则

$$P\{X_1 = X_2\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则随机变量 $Y = X^2$ 在 $[0, +\infty)$

的分布函数 $F_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设随机变量 X 与 Y 满足： $E(X) = -E(Y) = -2$ ， $D(Y) = 4D(X) = 4$ ， $\rho = -0.5$ ，由切比雪夫不等

式可估计概率 $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $Y = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布为

 (需写出自由度)。

7. 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, n \geq 4$ ，则统计量

$\left(\frac{n}{3} - 1\right) \sum_{i=1}^3 X_i^2 / \sum_{i=4}^n X_i^2$ 服从的分布为 (需写出自由度)。

8. 某种虾的身长 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，现随机抽取 9 只，算得平均身长为 $\bar{x} = 6$ (cm)，

样本标准差 $s = 0.6$ (cm)，则 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为 ($t_{0.025}(8) = 2.31$,

$t_{0.025}(9) = 2.26$, $t_{0.05}(8) = 1.86$, $t_{0.05}(9) = 1.83$)。

二、(本题满分 12 分) 有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3, 0.2, 0.1,

0.4。如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别是 $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ ，而乘飞机则不会迟到。

(1) 求朋友迟到的概率；(2) 如果朋友迟到了，试问他是乘火车来的概率是多少？

三、(本题满分 6 分) 某射手有 5 发子弹进行独立的射击，射击一次的命中率为 0.9，如果他击中目标就停止射击，否则一直射击到用完 5 发子弹为止，求所用子弹数 X 的分布律。

四、(本题满分 12 分) 已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = C e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$ ，求：

(1) 常数 C ；(2) X 的分布函数；(3) 概率 $P\{1 < X < 3\}$ 。

五、(本题满分 10 分) 某自动机床加工套筒的直径 X 服从正态分布。现从加工的这批套筒中任取 5 个，

测得直径(单位： μm)分别为 $x_1, x_2, \dots, x_5$ ，经计算得 $\bar{x} = 24.8$ ， $s^2 = 15.95$ 。试问：这批套筒直

径的方差与规定的 $\sigma^2 = 7$ 有无显著差别？(显著性水平 $\alpha = 0.01$ ， $\chi_{0.995}^2(4) = 0.207$ ，

$\chi_{0.995}^2(5) = 0.412$ ， $\chi_{0.005}^2(4) = 14.86$ ， $\chi_{0.005}^2(5) = 16.74$)

六、(本题满分 10 分) 二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 服从均匀分布，且

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ 0, & X - Y \leq 0, \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0, \\ 0, & X + Y \leq 0, \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$ ；(2) 求 Z_1 和 Z_2 的联合分布律；(3) 求 $COV(Z_1, Z_2)$ 。

七、(本题满分 12 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为样本， $\bar{X}$

为样本均值。求：(1) $E(X)$ ， $D(X)$ ；(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由。

八、(本题满分 14 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta 2^\theta x^{-(\theta+1)}, & x > 2, \\ 0, & x \leq 2, \end{cases}$ 其中 $\theta > 1$ 为未知参数，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本。求：(1) θ 的矩估计量；(2) θ 的极大似然估计量。

参考答案

一、1. $\frac{5}{8}$ ；2. 0.352；3. 0；4. $1 - e^{-3\sqrt{y}}$ ；5. $\frac{1}{12}$ ；6. $t(1)$ ；

7. $F(3, n-3)$ ；8. (5.538, 6.462)。

二、设 A_1, A_2, A_3, A_4 ——分别表示朋友乘火车、轮船、汽车、飞机来，

B——朋友迟到。则 $P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i) = 0.3(\frac{1}{6}) + 0.2(\frac{1}{5}) + 0.1(\frac{1}{4}) + 0 = \frac{23}{200} = 0.115$,

故 $P(A|B) = \frac{0.3(1/6)}{0.115} = \frac{10}{23} \approx 0.435$ 。

三、 $P\{X=i\}=(0.1)^{i-1} \times 0.9, i=1,2,3,4; P\{X=5\}=(0.1)^4$.

从而 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.9 & 0.09 & 0.009 & 0.0009 & 0.0001 \end{pmatrix}$.

四、(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 可得 $C = \frac{1}{2}$.

$$(2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^t dt, & x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t} dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$(3) P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-3}).$$

五 由题意, 需检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 7; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

取检验统计量 $\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \stackrel{H_0 \text{ 为真}}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

由 $P\{\eta \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \eta \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\} = \alpha$, 得拒绝域为 $|\eta \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \eta \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)|$.

计算得 $\eta = \frac{4 \times 15.95}{7} = 9.1143$, 而拒绝域为 $\eta \leq 0.207$ 或 $\eta \geq 14.86$, 不在拒绝域内, 从而接受 H_0 , 拒绝 H_1 ,

即认为这批套筒直径的方差与规定的 $\sigma^2 = 7$ 无显著差别.

$$\text{六 (1)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} = \frac{2}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(2)

$Z_2 \backslash Z_1$	0	1
0	1/4	1/2
1	0	1/4

$$(3) E(Z_1) = 1/4, E(Z_2) = 3/4, E(Z_1 Z_2) = 1/4, \text{COV}(Z_1, Z_2) = 1/16$$

$$\text{七 (1)} E(X) = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx - \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{12} - \frac{\theta}{12} + \frac{5}{48}.$$

$$(2) E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4\{D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2\} = 4\left\{\frac{D(X)}{n} + [E(X)]^2\right\} = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+5}{12} \neq \theta^2,$$

所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

$$\text{八、(1)} E(X) = \int_2^{+\infty} x \cdot \theta 2^\theta x^{-(\theta+1)} dx = \frac{2\theta}{\theta-1}, \text{ 从而由 } EX = \bar{X}, \text{ 得矩估计量为 } \hat{\theta}_M = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-2}.$$

$$(2) L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta 2^\theta x_i^{-(\theta+1)}) = \theta^n 2^{n\theta} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-(\theta+1)}, \quad \ln L(\theta) = n \ln \theta + n\theta \ln 2 - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{令 } (\ln L(\theta))' = \frac{n}{\theta} + n \ln 2 - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0, \quad \text{可得最大似然估计值 } \hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln 2},$$

$$\text{从而最大似然估计量为 } \hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln 2}.$$

河海大学 2023-2024 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 24 分）

1. 袋中有 6 只白球，5 只红球，现从中任取 3 只球，恰好抽到 2 只红球的概率为_____。
2. 在长为 10cm 的线段 AB 上任取一点 P ，并以线段 AP 为边作正方形，这个正方形的面积介于 25cm^2 与 49cm^2 之间的概率为_____。
3. 已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.1	0.1	0.1
1	0.2	0.1	0.2
2	0	0.1	0.1

则 $P\{X=1 | Y=2\} =$ _____。

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $P\{\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2}\} =$ _____。

5. 若 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim P(3)$, $Z \sim B(10,0.5)$, 则 $E(X+Y+Z) =$ _____。

6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则

下列式子中不正确的是 ()。

- (A) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ (B) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- (C) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (D) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

7. 在假设检验中，不拒绝原假设意味着 ()。
- (A) 原假设肯定是正确的 (B) 原假设肯定是错误的
- (C) 没有证据证明原假设是正确的 (D) 没有证据证明原假设是错误的

8. 设 3, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 5 为来自参数为 λ 的 Poisson 分布的样本，则参数 λ 的极大似然估计为_____。

二、(本题满分 12 分)

有甲、乙、丙三个盒子，甲盒子中装有一只白球和两只黑球，乙盒子中装有一只黑球和两只白球，丙盒子中装有三只白球和一只黑球。现抛掷一骰子以决定选择哪个盒子，若出现点数为 1, 2, 3，则选甲盒；若出现点数为 4，则选乙盒；若出现点数为 5, 6，则选丙盒，然后再从选中的盒子中任取一球。试求：(1) 取出的球为白球的概率；(2) 当取出的球为白球时，问此球分别来自甲、乙、丙盒的概率各是多少。

三、(本题满分 12 分)

已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} A(x-2), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 A 为未知常数。试求：(1) 常

数 A 的值; (2) X 的分布函数 $F(x)$; (3) $Y = X^2$ 的概率密度函数。

四、(本题满分 14 分)

设随机变量 (X, Y) 在以 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布。试求: (1) X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$; (2) $Z = X + Y$ 的概率密度函数; (3) $D(X + Y)$ 。

五、(本题满分 12 分)

设 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$, X_1, X_2 是来自总体 X 的简单随机样本。令 $\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$, $\hat{\mu}_3 = \frac{4}{9}X_1 + \frac{5}{9}X_2$ 。(1) 证明 $\hat{\mu}_1$ 、 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\mu}_3$ 均为 μ 的无偏估计量; (2) 问 $\hat{\mu}_1$ 、 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\mu}_3$ 中哪个更有效? 为什么? (3) 在 μ 的形如 $\hat{\mu} = aX_1 + bX_2$ 的无偏估计中, 有没有最有效的无偏估计量? 若有, 请求解; 若无, 请说明理由。

六、(本题满分 10 分)

设某种产品的某项指标服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从一批产品中随机抽取了 9 个, 经计算得 $\bar{x} = 27$, $s^2 = 16$ 。(1) 试求总体方差 σ^2 的置信度为 95% 的双侧置信区间;

(2) 在水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为这批产品该项指标的均值为 28。【参考数值: $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.05} = 1.645$, $t_{0.025}(8) = 2.31$, $t_{0.05}(8) = 1.86$, $t_{0.025}(9) = 2.26$, $t_{0.05}(9) = 1.83$, $\chi^2_{0.025}(8) = 17.54$, $\chi^2_{0.025}(9) = 19.02$, $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$, $\chi^2_{0.975}(9) = 2.70$ 】

七、(本题满分为 10 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为对应的样本值, μ 未知。

(1) 试求 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_M$; (2) 试求 μ 的极大似然估计量 $\hat{\mu}_{MLE}$ 。

八、(本题满分为 6 分)

已知 $X \sim N(1, \sigma^2)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, $Z \sim N(3, \sigma^2)$, 它们之间的相关系数分别为 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$, $\rho_{XZ} = -\frac{1}{2}$, $\rho_{YZ} = \frac{1}{2}$ 。(1) 求 $E[(X + Y)^2]$; (2) 令 $U = X + Y$, $V = Y + Z$, 求 U 和 V 的相关系数 ρ_{UV} 。

参考答案

一、1. $\frac{C_3^2 C_6^1}{C_{11}^3} = \frac{4}{11}$; 2. $1/5$; 3. 0.5 ; 4. $3/4$; 5. 8 ; 6. B ; 7. D ; 8. 3.25

二、令 $A_i (i=1, 2, 3)$ 分别表示选中的盒子为甲、乙、丙盒; B 为取出的球为白球, 于是 A_1 、 A_2 、 A_3 构成样本空间的一个划分, 且有: $P(A_1) = 3/6$, $P(A_2) = 1/6$, $P(A_3) = 2/6$, $P(B|A_1) = 1/3$, $P(B|A_2) = 2/3$, $P(B|A_3) = 3/6$

由全概率公式有: $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = 1/6 + 1/9 + 1/6 = 4/9$

由贝叶斯公式有: $P(A_1|B) = P(B|A_1)P(A_1)/P(B) = 3/8$, $P(A_2|B) = P(B|A_2)P(A_2)/P(B) = 1/4$,

$P(A_3|B) = P(B|A_3)P(A_3)/P(B) = 3/8$

三、(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_2^3 A(x-2)dx = \frac{A}{2} = 1$ 有 $A = 2$

(2) 由 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 有: 当 $x < 2$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$;

当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_2^x 2(t-2)dt = (x-2)^2$; 当 $x > 3$ 时, $F(x) = 1$ 。所以 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

(3) $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$ 。当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$, 所以 $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 0$

当 $y \geq 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{y}}, & 4 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。综上有: $f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{y}}, & 4 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

四、由题意可知 (X, Y) 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2dy = 2 - 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \int_0^z 2dx = 2z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & z > 1 \end{cases}$

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xdy = \frac{1}{3}$, $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2ydy = \frac{1}{3}$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xydy = \frac{1}{12}$, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2x^2 dy = \frac{1}{6}$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2y^2 dy = \frac{1}{6}$, $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$,

$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$, 所以 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36}$,

$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y) = \frac{1}{18}$

五、(1) $E(\hat{\mu}_1) = \frac{2}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu$, $E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) = \frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu = \mu$,

$E(\hat{\mu}_3) = \frac{4}{9}E(X_1) + \frac{5}{9}E(X_2) = \frac{4}{9}\mu + \frac{5}{9}\mu = \mu$, 所以 $\hat{\mu}_1$ 、 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\mu}_3$ 均为 μ 的无偏估计量。

(2) $D(\hat{\mu}_1) = \frac{4}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 = \frac{5}{9}\sigma^2$, $D(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{9}{16}D(X_2) = \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{9}{16}\sigma^2 = \frac{5}{8}\sigma^2$

$D(\hat{\mu}_3) = \frac{16}{81}D(X_1) + \frac{25}{81}D(X_2) = \frac{16}{81}\sigma^2 + \frac{25}{81}\sigma^2 = \frac{41}{81}\sigma^2$, 因为 $\frac{41}{81}\sigma^2 < \frac{5}{9}\sigma^2 < \frac{5}{8}\sigma^2$, 所以 $\hat{\mu}_1$ 、 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\mu}_3$ 中 $\hat{\mu}_3$ 最优。

(3) 因为 $\hat{\mu} = aX_1 + bX_2$ 为 μ 的无偏估计量, 所以 $E(\hat{\mu}) = aE(X_1) + bE(X_2) = (a+b)\mu = \mu$, 所以有 $a+b=1$

又 $D(\hat{\mu}) = a^2D(X_1) + b^2D(X_2) = (a^2+b^2)\sigma^2$, 下求 $L(a, b) = a^2+b^2$ 在条件 $a+b=1$ 下的最小值。将 $b=1-a$ 代入

$L(a, b) = a^2+b^2$ 中有: $L(a, b) = a^2+(1-a)^2 = 2a^2-2a+1 = G(a)$, 令 $G'(a) = 4a-2=0$ 得 $a = \frac{1}{2}$, 又 $G''(a)|_{a=1/2} = 4 > 0$, 故

$a = \frac{1}{2}$ 为 $G(a)$ 的最小值点。从而有 $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ 为 μ 的形如 $\hat{\mu} = aX_1 + bX_2$ 的无偏估计量中最有效的无偏估计量。

六、(1) 因为正态总体均值 μ 未知, 所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$,

又 $n=9$, $s^2=16$, $\alpha=0.05$, $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(8) = 17.54$, $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(8) = 2.18$,

所以 $\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} = \frac{8 \times 16}{\chi_{0.975}^2(8)} = \frac{8 \times 16}{2.18} = 58.72$, $\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} = \frac{8 \times 16}{\chi_{0.025}^2(8)} = \frac{8 \times 16}{17.54} = 7.30$,

所以所求的置信区间为 $(7.30, 58.72)$ 。

(2) 由题意构建假设: $H_0: \mu = 28$, $H_1: \mu \neq 28$

由于 σ^2 未知, 所以构建检验统计量为 $t = \frac{\bar{x} - 28}{s / \sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{ 为真时}}{=} \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 拒绝域为 $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$, 又 $|t| = \frac{|27 - 28|}{4 / \sqrt{9}} = 0.75 < t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.31$, 所以接受 H_0 , 即在水平 $\alpha = 0.05$ 下认为这批产品该项指标的均值为 28。

七、(1) 由于 $X \sim N(\mu, 1)$, 所以 $E(X) = \mu$, 由矩估计法有 $E(X) = \bar{X}$, 所以 $\hat{\mu}_M = \bar{X}$ 。

(2) 因为 $X \sim N(\mu, 1)$, 所以其密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$, 于是似然函数为 $L(\mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$, 从而 $\ln L(\mu) = \sum_{i=1}^n [-\frac{(x_i-\mu)^2}{2} - \ln \sqrt{2\pi}]$, 由 $\frac{d \ln L(\mu)}{d\mu} = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$

得 $\hat{\mu}_{MLE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

八、(1) $E[(X+Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) = D(X) + E^2(X) + D(Y) + E^2(Y) + 2[E(X)E(Y) + \rho_{XY}\sigma^2]$

$$= \sigma^2 + 1 + \sigma^2 + 4 + 2[2 + \frac{1}{2}\sigma^2] = 3\sigma^2 + 9$$

(2) $Cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = E[(X+Y)(Y+Z)] - E(X+Y)E(Y+Z)$

$$= E(XY) + E(XZ) + E(Y^2) + E(YZ) - [E(X)E(Y)] - [E(X)E(Z)] - E(Y^2) - E(Y)E(Z)$$

$$= Cov(X, Y) + Cov(X, Z) + D(Y) + Cov(Y, Z) = \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$D(U) = D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = 3\sigma^2, \text{ 同理 } D(V) = 3\sigma^2$$

$$\text{所以 } \rho_{UV} = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{1}{2}$$

河海大学 2024-2025 学年经管类《概率论与数理统计》试卷

一、单项选择题 (每题 3 分, 本题满分 30 分)

1. 已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$, 则 $P(A \cap B) = ()$.

A、0.1 ; B、0.3 ; C、0.4 ; D、0 .

2. 某小组共有 10 名学生, 其中女生 3 名, 选举 2 名代表, 则至少有 1 名女生当选的概率为 () .

A、7/15 ; B、8/15 ; C、3/5 ; D、1 .

3. 设随机变量 $X \sim N(3, 9), Y \sim N(-2, 16)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X + Y$ 服从的分布是 () .

A、 $N(3, 9)$; B、 $N(-2, 16)$; C、 $N(5, 25)$; D、 $N(1, 25)$.

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5, $D(X) = 16, D(Y) = 9$, 则 $D(2X - Y) = ()$.

A、17 ; B、31 ; C、49 ; D、61 .

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为取自总体 X 的简单随机样本, 则下列不是统计量的是 () .

A、 $X_1 + X_2 + X_3$; B、 $\max\{X_1, X_2, X_3\}$; C、 $\frac{1}{\sigma}(X_1 + X_2 + X_3)$; D、 $\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3)$.

6. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0, 9)$, 而 $X_1, \dots, X_9$ 和 $Y_1, \dots, Y_9$ 分别是来自总体 X

和 Y 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}}$ 服从的分布是 () .

A、 $t(8)$; B、 $t(9)$; C、 $t(10)$; D、 $N(0, 9)$.

7. 设总体 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(2, 4)$, 分别从 X 和 Y 中随机抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 和

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{25}, \bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} Y_i,$$

$$\text{则 } E \left[\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{25} (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = (\quad).$$

A、15 ;B、24 ;C、41 ;D、111 .

8. 一个 95% 的置信区间是指 () .

A、总体参数有 95% 的概率落在这一区间内；

B、总体参数有 5% 的概率未落在这一区间内；

C、在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，有 95% 的区间包含该总体参数；

D、在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，有 95% 的区间不包含该总体参数。

9. 设 X_1, X_2 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 必 () .

A、线性相关； B、不相关； C、相关但非线性相关； D、不独立。

10. 设 X_1, X_2, X_3 是 X 的一个样本， $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，则下列关于 μ 的无偏估计量中哪个更有效？ () .

$$\hat{\mu}_1 = X_1, \hat{\mu}_2 = \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2, \hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \hat{\mu}_4 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

A、 $\hat{\mu}_1$;B、 $\hat{\mu}_2$;C、 $\hat{\mu}_3$;D、 $\hat{\mu}_4$.

11、(本题满分 12 分)

设某地区成年居民中肥胖者占 10%, 不胖不瘦者占 82%, 瘦者占 8%, 又知肥胖者患高血压的概率为 20%, 不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%, 瘦者患高血压病的概率为 5%, 试求：

(1) 该地区居民患高血压病的概率？

(2) 若知某人患高血压, 可否断定他属于肥胖者？

12、(本题满分 10 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数与密度函数.

13、(本题满分 10 分)

随机变量 X 服从 $(1, 2)$ 上的均匀分布，求 $Y = e^{2X}$ 的概率密度函数.

14、(本题满分 10 分)

设总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} (\beta + 1)x^\beta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}, \beta > -1$ 未知， $X_1, X_2, \dots, X_n$

为来自总体 X 的样本，求参数 β 的极大似然估计量.

15、(本题满分 10 分)

设某种产品的重量服从于正态分布，随机测了 9 件产品的重量，算得样本方差 $s^2 = 11(g^2)$ ，求该正态分布的方差 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间. 【参考数值： $z_{0.025} = 1.960, z_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(8) = 2.306, t_{0.05}(8) = 1.860, t_{0.025}(9) = 2.262, t_{0.05}(9) = 1.833, \chi_{0.025}^2(8) = 17.535, \chi_{0.05}^2(8) = 15.507, \chi_{0.025}^2(9) = 19.022, \chi_{0.05}^2(9) = 16.919, \chi_{0.975}^2(8) = 2.180, \chi_{0.95}^2(8) = 2.733, \chi_{0.975}^2(9) = 2.700, \chi_{0.95}^2(9) = 3.325$ 】

16、(本题满分为 10 分)

假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布，记 $U = \begin{cases} 0, & X \leq Y, \\ 1, & X > Y. \end{cases}$

$$V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y, \\ 1, & X > 2Y. \end{cases}$$

(1)求 U 和 V 的联合分布律；(2)求 U 和 V 的相关系数 ρ .

17、(本题满分为 8 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0

求(1) $E[\max\{X, Y\}]$; (2) $D[\max\{X, Y\}]$.

参考解答

一、选择题

1. A ; 2. B; 3. D; 4. C; 5. C; 6. B; 7. D; 8. C; 9. B; 10. C;
11、

$A_i (i = 1, 2, 3)$ 分别表示居民为肥胖者,不胖不瘦者,瘦者

B :“居民患高血压病”

则 $P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.82, P(A_3) = 0.08$

$P(B|A_1) = 0.2, P(B|A_2) = 0.1, P(B|A_3) = 0.05$

由全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = 0.106$$

由贝叶斯公式

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{10}{53}, P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{41}{53}$$

$$P(A_3|B) = 1 - \left[\frac{10}{53} + \frac{41}{53} \right] = \frac{2}{53}$$

故不能断定该居民属于肥胖者。

$$12、F_Z(z) = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

当 $z < 0, F_Z(z) = 0$; 当 $0 \leq z < 1, F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} (x+y) dy = \frac{1}{3} z^3$;

当 $1 \leq z < 2, F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (x+y) dy = z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3}$; 当 $z \geq 2, F_Z(z) = 1$.

所以:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{3}z^3 & 0 \leq z < 1 \\ z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{3} & 1 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases} \quad f_Z(z) = \begin{cases} z^2 & 0 \leq z < 1 \\ z(2-z) & 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

13、

解:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$\because y = e^{2x} > 0 \text{ 单调增}, \therefore x = \frac{1}{2} \ln y. x' = \frac{1}{2y};$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\frac{1}{2} \ln y) \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y}, & 1 \leq \frac{1}{2} \ln y \leq 2, \text{ 即 } e^2 < y < e^4 \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$14、L(\beta) = \prod_{i=1}^n (\beta + 1)x_i^\beta = (\beta + 1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\beta \quad \ln L(\beta) = n \ln(\beta + 1) + \beta \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d}{d\beta} \ln L(\beta) = \frac{n}{\beta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad \text{解得 } \beta \text{ 的极大似然估计为 } \hat{\beta} = -1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right]^{-1}.$$

15、

$$1 - \alpha = 0.95, \frac{\alpha}{2} = 0.025, 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, n - 1 = 8$$

$$\chi_{0.975}^2(8) = 17.535, \chi_{0.025}^2(8) = 2.18$$

$$\frac{8 \times 11}{17.535} = 5.018 \quad \frac{8 \times 11}{2.18} = 40.367$$

$\therefore \sigma^2$ 的 95% 的置信区间为: (5.018, 40.367)

16、

解: (1) (U, V) 可能的取值为 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

U \ V	0	1
	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

(2)

$$\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

17、

Z = max {X, Y} 的分布率为

Z	1	2	3
p	$\frac{14}{120}$	$\frac{71}{120}$	$\frac{35}{120}$

$$\text{所以 (1) } E(Z) = \frac{261}{120}; (2) E(Z^2) = \frac{613}{120}. \quad D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{1813}{4800}$$

河海大学 2024-2025 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、单项选择题（每小题 3 分，本题满分 24 分）

1. 对于任意二事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是()

- (A) $A \subset B$ (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$ (C) $A\overline{B} = \Phi$ (D) $\overline{A}B = \Phi$

2. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 今每人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人抽得奖券的金额数学期望().

- (A) 6 (B) 7.8 (C) 9 (D) 12

3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} (i=1,2)$, 且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\} = ()$.

- (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

4. 袋中有 10 个除颜色外完全相同的球, 其中 6 个黑球, 4 个白球, 现从中任取 4 个球, 记随机变量 X 为其中白球的个数, 随机变量 Y 为其中黑球的个数, 若取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分, 随机变量 Z 为取出 4 个球的总得分, 下列说法正确的是 ()

- (A) $EX > EY$ (B) $EZ = \frac{27}{5}$ (C) $P\{|Z - 6| \leq 1\} = \frac{97}{105}$ (D) $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$

5. 设 X 服从正态分布 $N(0, 2^2)$, 而 $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量

$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$ 所服从的分布为()

- (A) $\chi^2(15)$ (B) $t(14)$ (C) $F(10, 5)$ (D) $F(1, 1)$

6. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1})$ 是来自正态总体的简单随机抽样, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

则统计量 $Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从的分布是().

- (A). $N(0, 1)$ (B). $t(n-1)$ (C). $t(n+1)$ (D). $t(n)$

7. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, \dots, X_{n_1}; Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 分别是两总体相互独立的样本, 则有()

- (A) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$; (B) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$;
(C) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2})$; (D) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$.

8. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则 $\mu^2 + \sigma^2$ 的矩估计量为()

- (A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$; (B) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$; (C) $\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$; (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

二、填空题（每小题 3 分，本题满分 12 分）

9. 设随机变量 X 概率分布分布为 $P\{X=k\} = \frac{c}{k!}, k=0,1,2,\dots$, 则常数 $c =$ _____。

10. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $E(Xe^{2X}) =$ _____。

11. 设随机变量 X 在区间 $[-3, 1]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $Y = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$, 则方差 $D(Y) =$ _____。

12. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $\chi^2(n)$ 的样本, 则 $D(\bar{X}) =$ _____。

13. (本题满分 10 分) 设玻璃杯整箱出售, 每箱 20 只, 各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1, 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 由售货员任取一箱, 经顾客随机察看 4 只, 若无残次品, 则买此箱玻璃杯, 否则不买。求: (1) 顾客买此箱玻璃杯的概率; (2) 在顾客买的此箱玻璃杯中, 确实没残次品的概率。

14. (本题满分 8 分) 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$, 求随机变量 $Y = e^X$ 的密

度函数 $f_Y(y)$ 。

15. (本题满分 10 分) 假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分

布, 记 $U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}$, $V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$ 。(1) 求 U 和 V 的联合分布; (2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ 。

16. (本题满分 12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(1-x), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

(1) 求常数 k ; (2) 讨论随机变量 X, Y 的相互独立性; (3) 求 $Z = X+Y$ 的密度函数。

17. (本题满分 13 分) 设总体 X 服从 $(0, \theta)$ 上的均匀分布, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数。 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本。求 (1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (2) 极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$; (3) θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$ 是否为 θ 的无偏估计量, 请给出理由。

18. (本题满分 11 分) 设有一批胡椒粉, 每袋净重服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。现从中任取 31 袋, 算得他们的平均重量为 73 (单位: g), 标准差为 8 (单位: g)。(1) 求总体方差 σ^2 的置信度为 95% 的双侧置信区间。

(2) 某人说批胡椒粉的平均重量为 75 g, 你赞同这个人的观点吗? ($\alpha = 0.05$)

(参考数据: $z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.960$, $t_{0.025}(30) = 2.0423$, $t_{0.05}(30) = 1.6973$, $t_{0.025}(31) = 2.0395$,

$t_{0.05}(31) = 1.6955$, $\chi^2_{0.025}(30) = 46.979$, $\chi^2_{0.025}(31) = 48.232$, $\chi^2_{0.975}(30) = 16.791$, $\chi^2_{0.975}(31) = 17.539$,

$\sqrt{30} = 5.477$, $\sqrt{31} = 5.568$)

参考答案

1 D; 2 B; 3 A; 4 C; 5 C; 6 B; 7 B; 8 D; 9. $\frac{1}{e}$; 10. $2e^2$; 11. $3/4$; 12. 2。

13、设 A ——买下该箱, B_1 ——含 0 只残次品, B_2 ——含 1 只残次品, B_3 ——含 2 只残次品

$$(1) P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

$$= 1 \times 0.8 + \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} \times 0.1 + \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} \times 0.1 = \frac{448}{475} \approx 0.9431$$

$$(2) P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{1 \times 0.8}{448/475} = \frac{95}{112} \approx 0.8482$$

$$14、F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\}。当 y \leq 0 时, F_Y(y) = 0 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 0;$$

$$当 y > 0 时, F_Y(y) = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = \int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x) dx$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y > 1 \\ 0, & 0 < y \leq 1 \end{cases} \quad 综上有 f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

$$15、(1) (X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(U, V) 所有可能取值为: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 。且

$$P\{U=0, V=0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{U=0, V=1\} = P\{X \leq Y, X > 2Y\} = 0$$

$$P\{U=1, V=0\} = P\{X > Y, X \leq 2Y\} = P\{Y < X \leq 2Y\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{U=1, V=1\} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) 由 (1) 的结构易知 UV 、 U 和 V 的分布律分别为:

$$UV \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}; \quad V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$于是有 E(U) = \frac{3}{4}, D(U) = \frac{3}{16}, E(V) = \frac{1}{2}, D(V) = \frac{1}{4}, E(UV) = \frac{1}{2},$$

$$\text{cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{1}{8}, \therefore \rho = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$16、(1) 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \iint_{0 < y < x < 1} k(1-x) dx dy = k \int_0^1 dx \cdot \int_0^x (1-x) dy = \frac{1}{6} k, \therefore k = 6$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 6 \int_0^x (1-x) dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 6 \int_y^1 (1-x) dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 3(y-1)^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不相互独立。

$$(3) f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} 6 \int_{z/2}^z (1-x) dx = 3z - \frac{9z^2}{4}, & 0 < z < 1 \\ 6 \int_{z/2}^1 (1-x) dx = 3 - 3z + \frac{3z^2}{4}, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

17、(1) 由于 $E(X) = \frac{0+\theta}{2}$, 由 $E(X) = \bar{X}$, 得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_M = 2\bar{X}$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 < x_i < \theta, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 1 < x_{(1)} \leq x_{(n)} < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$L(\theta)$ 关于 θ ($\theta > 0$) 是单调递减的, 故 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}$.

(3)

$$\therefore F(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ \int_1^x \frac{1}{\theta} dt = \frac{x}{\theta}, & 1 < x < \theta, \text{ 故 } \hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)} \text{ 的概率密度} \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

$$f_{(n)}(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z) = \begin{cases} n \left(\frac{z}{\theta} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}, & 0 < z < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore E(\hat{\theta}_{MLE}) = E[X_{(n)}] = \int_0^{\theta} z \cdot \frac{n}{\theta^n} z^{n-1} dz = \frac{n}{n+1} \theta \neq \theta,$$

故 $\hat{\theta}_{MLE}$ 不是 θ 的无偏估计量.

18、

(1) 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 μ 未知, 所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$,
又 $n=31, S^2=64, \alpha=0.05$, 所以 $\chi_{0.025}^2(30)=46.979, \chi_{0.975}^2(30)=16.791, (\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$
= $(40.869, 114.347)$

(2) 根据题意须检验假设 $H_0: \mu=75, H_1: \mu \neq 75$, 由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 σ^2 未知, 令检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - 75}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 由 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 得拒绝域为 $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$, 又 $\bar{X}=73, \alpha=0.05$, $t_{0.025}(30)=2.0423$, 所以 $|t|=1.392 < 2.0423$, 接受 H_0 , 即赞同这位老师的说法。